



Klassische Theoretische Physik: Mechanik

Patrick Simon

Argelander-Institut für Astronomie

Auf dem Hügel 71

psimon@astro.uni-bonn.de

3. Dezember 2013

1 Starre Körper

Bisher haben wir entweder nur einzelne Punktteilchen oder Systeme von N Punktteilchen betrachtet. Körper, deren physikalische Ausdehnung nicht vernachlässigt werden kann, fallen nicht direkt in diese Kategorien. Man kann diese Körper aber als ein Vielteilchensystem oder ein Kontinuum von vielen Punktmassen beschreiben, das sehr restriktiven Zwangsbedingungen ausgesetzt ist.

Der einfachste Fall ist der eines *starren Körpers*, d.h. ein Körper, der nicht deformierbar sein soll. Dies bedeutet, wir können den Körper zwar verschieben (drei Freiheitsgrade) oder im Raum drehen (drei Freiheitsgrade), aber niemals die relativen Abstände $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ seiner Bestandteile verändern. Hierdurch reduziert sich die Beschreibung der starren Körper auf maximal sechs Koordinaten q_i .

Die Anzahl der Freiheitsgrade wollen wir in der folgenden Betrachtung erst mal noch weiter beschränken, indem wir nur Systeme betrachten, bei denen entweder der Massenschwerpunkt \mathbf{R} des Körpers im (inertialen) Beobachtersystem festgehalten wird, oder bei denen ein beliebiger anderer Punkt des Körpers für den Beobachter in Ruhe ist. Wir bezeichnen den ruhenden Punkt als Drehpunkt des Körpers. Hierdurch müssen wir nur die Orientierung des Körpers im Raum als frei gegeben betrachten (drei Freiheitsgrade). O.B.d.A. legen wir den Drehpunkt in der Ursprung O des Beobachters.

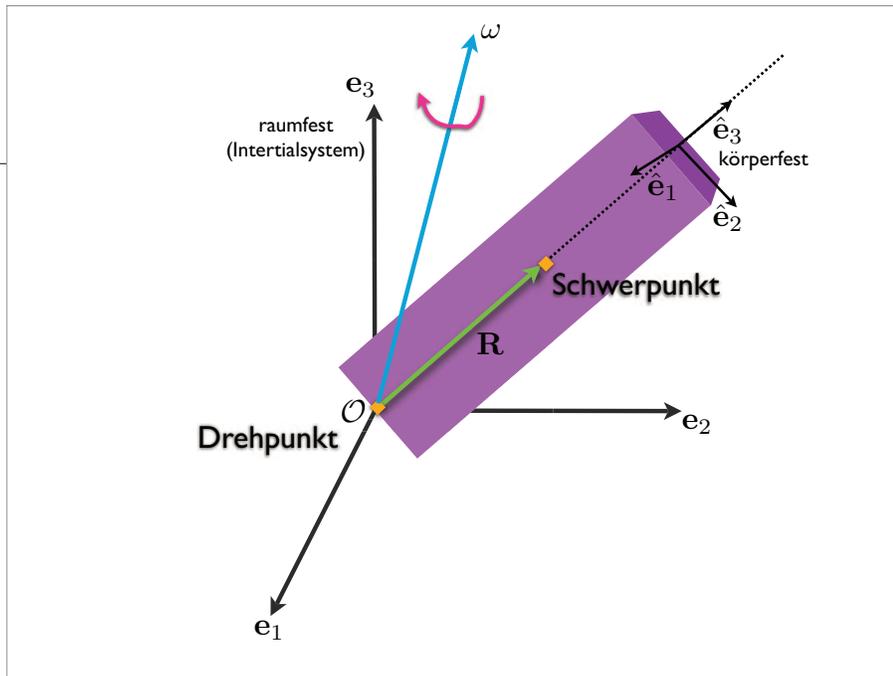
Unser Ziel im Folgenden ist es, eine dynamische Beschreibung der eines starren Körpers mit festem Drehpunkt zu finden. Genauer: Wir suchen die Bewegungsgleichungen der Orientierung des Körpers in einem äußeren Kraftfeld.

1.1 Drehimpuls

Wir beginnen mit der Frage, wie groß der Gesamtdrehimpuls \mathbf{L} eines starren Körpers ist. Allgemein hatten wir diese Frage schon im Abschnitt über Vielteilchensysteme beantwortet,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}}. \quad (1)$$

Hier bezeichnet $\mathbf{L}' = \sum m_i \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i$ den Drehimpuls im Schwerpunktsystem; \mathbf{r}'_i und $\dot{\mathbf{r}}'_i$ sind die Orte und Geschwindigkeiten im Schwerpunktsystem.



Der neue Fall hier ist etwas spezieller. Da die Abstände $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ zwischen zwei beliebigen Punkten als holonom-skleronome Zwangsbedingung immer gleich sein müssen, können alle Teilchenorte höchstens durch die gleichzeitige Rotation $D(\alpha; \mathbf{e})$ um die gleiche Rotationsachse \mathbf{e} bewegt werden, $|D(\alpha; \mathbf{e})\mathbf{r}_i - D(\alpha; \mathbf{e})\mathbf{r}_j| = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. Wir fassen, wie vorher schon, die Rotationsachse und die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ der Rotation um diese Achse durch den Vektor $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}$ der Winkelgeschwindigkeit zusammen. Die Rotationsachse geht hierbei immer durch den Drehpunkt O . Der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ darf natürlich die Richtung und den Betrag mit der Zeit ändern und wird dies i.A. auch tun.

Wie schon besprochen, sieht der Beobachter unter diesen Umständen eine Rotations-Geschwindigkeit eines Massepunktes i von

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i . \quad (2)$$

Folglich rotiert auch der Schwerpunkt bei \mathbf{R} mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$. Das folgt aus $\dot{\mathbf{R}} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i / M$ und der obigen Relation. Ein Punkt bei \mathbf{r}'_i relativ zu \mathbf{R} rotiert deshalb mit der Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = \dot{\mathbf{r}}'_i + \dot{\mathbf{R}} \quad (3)$$

und folglich im Schwerpunktsystem mit der Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{r}}'_i = \dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i . \quad (4)$$

Der Drehimpuls im Schwerpunktsystem wird hierdurch (“BACCAB”-Regel)

$$\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) = \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} |\mathbf{r}'_i|^2 - \mathbf{r}'_i \langle \mathbf{r}'_i, \boldsymbol{\omega} \rangle) . \quad (5)$$

Die Abbildung I' , definiert durch

$$\mathbf{L}' = I' \boldsymbol{\omega} := \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} |\mathbf{r}'_i|^2 - \mathbf{r}'_i \langle \mathbf{r}'_i, \boldsymbol{\omega} \rangle) , \quad (6)$$

ist interessant. Diese ist eine *lineare* Abbildung $I' : V^3 \mapsto V^3$, die auf den Vektor $\boldsymbol{\omega}$ wirkt (ersetze oben $\boldsymbol{\omega} = \lambda_1 \boldsymbol{\omega}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\omega}_2$; dann ist $I' \boldsymbol{\omega} = \lambda_1 I' \boldsymbol{\omega}_1 + \lambda_2 I' \boldsymbol{\omega}_2$). Wir nennen I' den *Trägheitstensor* der Massenverteilung des Körpers. Üblicherweise wird der Trägheitstensor bezüglich einer (orthonormalen) Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ angegeben, so dass wir den Drehimpuls $\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^3 L'_i e_i$ als Matrixprodukt von Koordinaten darstellen können,

$$\begin{pmatrix} L'_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I'_{11} & I'_{12} & I'_{13} \\ I'_{21} & I'_{22} & I'_{23} \\ I'_{31} & I'_{32} & I'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} , \text{ oder } L'_i = \sum_{j=1}^3 I'_{ij} \omega_j , \quad (7)$$

wobei

$$I'_{kl} = \sum_{i=1}^N m_i [\delta_{kl}^K (x'^2_{i,1} + x'^2_{i,2} + x'^2_{i,3}) - x'_{i,k} x'_{i,l}] \quad (8)$$

gegeben ist für die Ortsvektoren $\mathbf{r}'_i = \sum_j x'_{i,j} e_j$. Diese Relation erhält man aus $L'_i = \langle I' \boldsymbol{\omega}, e_i \rangle$ mit einer direkten Koordinatendarstellung von \mathbf{r}'_i und $\boldsymbol{\omega}$; δ_{kl}^K ist das Kronecker-Symbol.

Die Abbildung I' ist ein Tensor 2. Stufe, was bedeutet, dass sich dessen Koordinaten I'_{kl} unter einer Rotation $D : V^3 \mapsto V^3$ wie das (dyadische) Produkt von zwei Vektoren transformieren:

$$x'_i \mapsto \sum_{k=1}^3 D_{ik} x'_k \implies I'_{ij} \mapsto \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 D_{ik} D_{jl} I'_{kl} ; \quad (9)$$

D_{kl} ist die Koordinatendarstellung der Rotation bezüglich der Basis e_i . Die Diagonalelemente des Trägheitstensors nennt man *Trägheitsmomente*, die Nicht-Diagonalelemente *Deviationsmomente*.

Wir haben nun einen Ausdruck für den Drehimpuls L' im Schwerpunktsystem gefunden, der nur von ω und dem Trägheitstensor I' abhängt. Der Gesamtdrehimpuls um den Ursprung O ist dann nach Gl. (1):

$$L = I'\omega + M\mathbf{R} \times (\omega \times \mathbf{R}) = I'\omega + M(\omega|\mathbf{R}|^2 - \mathbf{R}\langle \mathbf{R}, \omega \rangle) = I'\omega + I_R\omega = (I' + I_R)\omega = I\omega . \quad (10)$$

Wir müssen also zum Trägheitstensor I' im Schwerpunktsystem den Tensor I_R addieren, um den Trägheitstensor I relativ zum Drehpunkt O zu erhalten. Der Tensor I_R ist der Trägheitstensor eines einzelnen Massensepunktes der Masse M , der sich im Abstand \mathbf{R} vom Drehpunkt befindet.

Anders ausgedrückt: Kennen wir den Trägheitstensor I' um den Schwerpunkt, dann erhalten wir den Trägheitstensor I für eine Rotation um jeden anderen Drehpunkt durch Addition von I_R , $I = I' + I_R$.

Anmerkung Häufig betrachtet man bei starren Körpern ein Kontinuum $N \rightarrow \infty$ von Punktmassen statt einer diskreten Menge von Punktmassen. In diesem Fall sind Summen der Art

$$\sum_{i=1}^N m_i f(\mathbf{r}_i) \quad (11)$$

durch Volumenintegrale zu ersetzen:

$$\int_V dV \rho(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) , \quad (12)$$

wobei dV ein infinitesimales Volumenelement der Masse $dm = dV\rho(\mathbf{r})$ beim Ort \mathbf{r} darstellt; $\rho(\mathbf{r})$ ist die Massendichte bei \mathbf{r} . Wir stellen uns also ein Massenkontinuum als Grenzfall unendlich vieler infinitesimaler Massenpunkte vor. So wird beispielsweise im Kontinuum-Grenzfall das Trägheitsmoment

$$I'_{ij} = \int_V dV \rho(\mathbf{r}') \left[\delta_{ij}^K (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) - x_i' x_j' \right] . \quad (13)$$

Konzeptionell ändert sich aber für die Diskussion der starren Körper hierdurch nichts.

Der Kontinuum-Fall ist im Übrigen auch der allgemeinere Fall. Wir können nämlich durch $\rho(\mathbf{r})$ jede diskrete Verteilung von N Massenpunkten (m_i, \mathbf{r}_i) als Summe von Dirac-Deltafunktionen darstellen,

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N m_i \delta_D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) . \quad (14)$$

1.2 Kinetische Energie

Wir kennen nun den Drehimpuls des starren Körpers. Was ist dessen gesamte kinetische Energie T ?

Diese erhalten wir, wie im Abschnitt ?? besprochen, aus der Summe der kinetischen Energie eines Punktteilchens der Masse m bei \mathbf{R} und der kinetischen Energie im Schwerpunktsystem,

$$T = \frac{1}{2} \langle m \odot \dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{z}} \rangle_z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{r}}'_i|^2 + \frac{M}{2} |\dot{\mathbf{R}}|^2. \quad (15)$$

Nun ist aber, wie eben gezeigt, $\dot{\mathbf{r}}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$ und $\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$, so dass (Erinnerung: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{a} \rangle$)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i|^2 + \frac{M}{2} |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}|^2 \quad (16)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \langle \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \rangle + \frac{M}{2} \langle \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \rangle \quad (17)$$

$$= \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \rangle + \frac{M}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{R} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \rangle \quad (18)$$

$$= \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \rangle + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_R \boldsymbol{\omega} \rangle = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \rangle = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{L} \rangle. \quad (19)$$

Die kinetische Energie des starren Körpers ergibt sich demnach einfach aus dem Skalarprodukt von $\boldsymbol{\omega}$ und dem Drehimpuls $\mathbf{L}/2$. In Komponentenschreibweise bezüglich der (raumfesten) Beobachterbasis \mathbf{e}_i ist das eine quadratische Funktion in ω_i , nämlich

$$T = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{L} \rangle = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 I_{kl} \omega_k \omega_l. \quad (20)$$

1.3 Potenzielle Energie

Was ist die gesamte potenzielle Energie des starren Körpers? Diese ergibt sich aus der Summe der potenziellen Energien aller Punktteilchen,

$$U(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^N U_i^{(a)}(\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \approx \sum_{i=1}^N U_i^{(a)}(\mathbf{R}); \quad (21)$$

$U_i^{(a)}(\mathbf{r})$ entspricht dem äußeren Potenzial des i ten Teilchens. Innere Potenziale können wir hier vernachlässigen, weil sich die relativen Abstände der Teilchen untereinander nicht verändern dürfen.

Die Approximation rechts nimmt zusätzlich an, dass die *Ausdehnung des Körpers klein* ist gegenüber den räumlichen Änderungen der Potentiale $U_i^{(a)}$; das äußere Kraftfeld ist praktisch homogen für den Körper. In diesem Fall können wir uns für $U(\mathbf{R})$ den Körper als Punktmasse bei \mathbf{R} vorstellen, der sich im Potenzial $U(\mathbf{r}) = \sum_i U_i^{(a)}(\mathbf{r})$ bewegt. Im homogenen Erdschwerefeld wäre dies einfach $U(\mathbf{r}) = -M\langle \mathbf{g}, \mathbf{r} \rangle$, wobei \mathbf{g} der konstante Vektor der Schwerebeschleunigung am Erdboden ist, und ist $M = \sum_i m_i$ die Gesamtmasse.

Ist diese Näherung nicht anwendbar, dann wird die potenzielle Energie von \mathbf{R} und der Orientierung des Körpers abhängen. (In diesem Fall unterscheidet man außerdem zwischen dem Schwerpunkt, der Punkt der effektiv das Potenzial des Körpers bestimmt, und dem Massenzentrum, das unserer Definition von \mathbf{R} entspricht.)

1.4 Lagrange-Funktion

Mit T und U können wir nun eine Lagrange-Funktion der starren Körpers aufschreiben (fester Drehpunkt: $|\mathbf{R}| = \text{konst}$):

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \rangle - U(\mathbf{R}) . \quad (22)$$

Einer Aufstellung der Bewegungsgleichungen scheint jetzt nichts mehr im Wege zu stehen. Jedoch müssen wir noch den Vektor \mathbf{R} und den Vektor $\boldsymbol{\omega}$ durch drei generalisierte Koordinaten q_i (Orientierung des Körpers) und deren Geschwindigkeiten \dot{q}_i im Falle von $\boldsymbol{\omega}$ darstellen. Darüber hinaus hängt auch der Trägheitstensor \mathbf{I} von q_i ab, weil i.A. eine andere Orientierung des Körpers die Massenverteilung des Körpers für den Beobachter verändert.

Um Bewegungsgleichungen finden zu können, benötigen wir nun eine geeignete Parametrisierung der Orientierung des Körpers und eine damit einhergehende Parametrisierung des Trägheitstensors.

1.5 Hauptträgheitsachsen

Eine geeignete Parametrisierung besteht darin, den Trägheitstensor in einem Koordinatensystem anzugeben, das mit dem Körper zusammen rotiert (*körperfest*). Diese bedeutet *nicht*, dass wir als Referenzsystem

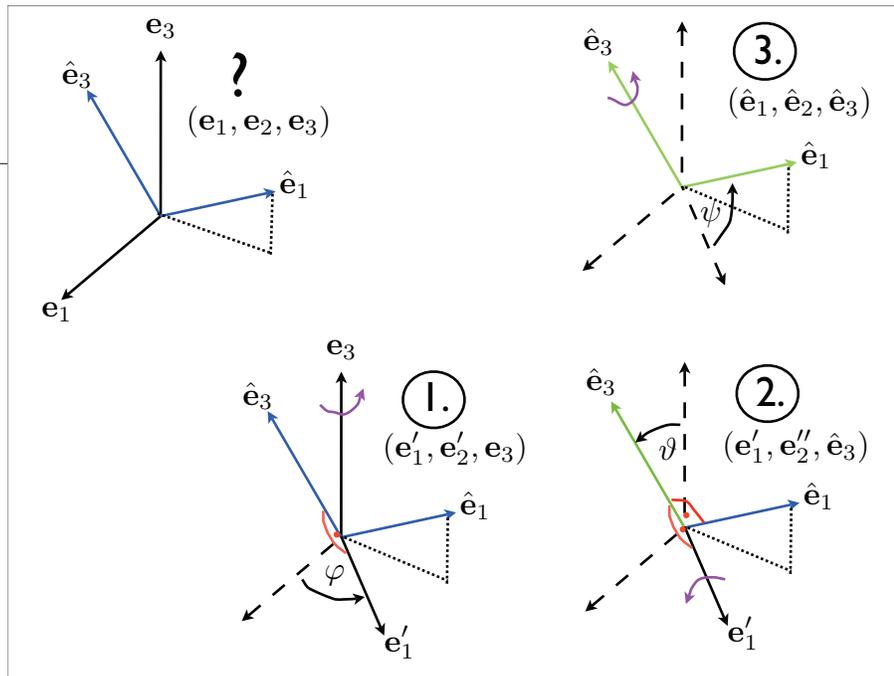
nun einen rotierenden Beobachter wählen; wir bleiben immer noch bei einem inertialen Beobachter (mit raumfester Basis e_i), der den bewegten Körper betrachtet. Es bedeutet nur, dass wir uns zur Berechnung von T eine Basis $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ wählen, die an den starren Körper angeheftet wird. Bezüglich dieser Basis sind die Koeffizienten \hat{I}_{ij} des Trägheitstensors zeitlich konstant, da sich die Massenverteilung im (starren) Körper in der körperfesten Basis nicht ändert. Um T berechnen zu können, muss jedoch auch der Vektor $\omega = \sum_i \hat{\omega}_i \hat{e}_i$ durch die körperfeste Koordinaten ausgedrückt werden.

Welches körperfeste Koordinatensystem das geeignetste für die Darstellung des Trägheitstensors? Grundsätzlich gibt es schließlich unendlich viele Möglichkeiten, eine Basis fest am Körper zu verankern. Eine optimale körperfeste Basis ist durch die Matrix I_{ij} selbst gegeben: das Eigensystem \hat{e}_i des Tensors I . Die Matrix I_{ij} ist eine symmetrische Matrix, d.h. $I_{ij} = I_{ji}$. Aus diesem Grunde ist die Matrix I_{ij} diagonalisierbar, was bedeutet, relativ zu den Eigenvektoren \hat{e}_i verschwinden alle Deviationsmomente von \hat{I}_{ij} :

$$((\hat{I}_{ij})) = \begin{pmatrix} \hat{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{I}_3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{I}\hat{e}_i = \hat{I}_i \hat{e}_i; \quad \hat{I}_{ij} = \langle \hat{e}_j, \mathbf{I}\hat{e}_i \rangle = \delta_{ij}^K \hat{I}_i. \quad (23)$$

Die Basisvektoren bzw. *Eigenvektoren* \hat{e}_i bestimmen die so-genannten *Hauptträgheitsachsen* der Massenverteilung im Körper; \hat{I}_i sind die *Eigenwerte* des Trägheitstensors, die sogenannten *Hauptträgheitsmomente*. Diese sind körperfest, d.h. sie rotieren zusammen mit dem Körper. Offensichtlich ist diese Basis eine gute Wahl zur Darstellung des Trägheitstensors, weil hier mindestens sechs (drei freie) Matrixelemente verschwinden. Haben wir einmal \hat{e}_i gefunden, dann ist deshalb $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \hat{I}_i \hat{\omega}_i^2$ und die Parameter \hat{I}_i sind zeitlich konstant.

Anmerkung Wir bezeichnen Körper mit zwei Momenten $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$ und einem dritten verschwindenden Moment $\hat{I}_3 = 0$ als Rotator. Körper heißen unsymmetrisch, wenn alle Momente verschieden sind und symmetrisch, wenn zwei Momente gleich sind. Ein Kugelkreisel hat $\hat{I}_1 = \hat{I}_2 = \hat{I}_3$.



1.6 Euler-Winkel

Um nun noch die Koeffizienten $\hat{\omega}_i$ im körperfesten Koordinatensystem zu bestimmen, brauchen wir zuerst drei Winkel, die die räumliche Orientierung des Körpers und damit die Orientierung der körperfesten Basis zur raumfesten Beobachterbasis eindeutig beschreiben. Hierfür wählen wir drei Winkelkoordinaten, die die raumfeste Basis e_i des Beobachters durch Rotation exakt in die körperfeste Basis \hat{e}_i eines gegebenen Zeitpunkts überführt.

Genau genommen brauchen wir jedoch dafür zu sorgen, dass diese Rotation zwei Basis-Vektoren e_i mit zwei Basis-Vektoren \hat{e}_i zur Deckung bringt. Ist das erfüllt, werden automatisch auch die dritten Basis-Vektoren übereinstimmen, weil $\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1$ (bei gleicher Händigkeit). Deswegen konzentrieren wir uns nun auf ein Schema, das in drei Schritten mit drei unabhängigen Winkeln den Vektor e_3 nach \hat{e}_3 (“z-Achse”) und den Vektor e_1 nach \hat{e}_1 (“x-Achse”) rotiert.

Hierfür ist es gut, sich vorher das Folgende zu veranschaulichen. Angenommen, wir haben einen Vektor n , der senkrecht auf den Vektoren e und e' steht. Dann können wir *immer* e nach e' durch eine alleinige Rotation um die Achse entlang n überführen (das Rotationszentrum soll im Folgenden immer

O sein). Dies liegt daran, dass sowohl e als auch e' in der (Rotations-)Ebene liegen, auf der n senkrecht steht. Durch diese Rotation wird der Vektor n selbst nicht verändert. Nach der Rotation ist e' insbesondere immer noch senkrecht zu n . Das Prozedere der Euler-Rotation ist nun wie folgt:

1. Die erste Rotationsachse sei durch den raumfesten Vektor e_3 gegeben. Wir drehen die *gesamte* Basis e_i um diese Achse, nämlich um den Winkel φ bis der rotierte Vektor e_1 senkrecht auf dem körperfesten Vektor \hat{e}_3 steht. Wir nennen den rotierten Vektor e_1 nun e'_1 . Der neue Vektor e'_1 soll wegen der Eindeutigkeit im gleichen Halbraum liegen wie \hat{e}_1 .
2. Nach Schritt 1 steht e'_1 senkrecht auf \hat{e}_3 und e_3 . Dies bedeutet, wir können durch Rotation der Basis aus Schritt 1 um einen Winkel ϑ entlang e'_1 nun den Vektor e_3 in den körperfesten Vektor \hat{e}_3 überführen. Der Vektor e'_1 wird durch diese Rotation nicht verändert. Insbesondere ist e'_1 immer noch senkrecht zu \hat{e}_3 .
3. Schritt 1 und 2 zusammen haben also (e_1, e_3) nach (e'_1, \hat{e}_3) gedreht. Somit ist die "neue" z-Achse \hat{e}_3 senkrecht zum körperfesten Vektor \hat{e}_1 (Orthonormalbasis), aber auch senkrecht zum Zwischenvektor e'_1 . Folglich liegen \hat{e}_1 und e'_1 in der Ebene, auf der \hat{e}_3 senkrecht steht. Drehen wir also nun abschließend alles um einen Winkel ψ um die Achse entlang \hat{e}_3 , dann können wir auch noch e'_1 und \hat{e}_1 zur Deckung bringen, ohne dabei \hat{e}_3 zu verändern. Damit haben wir unser Ziel erreicht!

Dieses Schema verwendet die *Euler-Winkel* $(\varphi, \vartheta, \psi)$, um die raumfeste Basis des Beobachters in die körperfeste Basis zu rotieren. Unsere generalisierten Koordinaten sind deshalb diese drei Euler-Winkel.

1.7 Kinetische Energie mit Euler-Winkeln

Ändert sich die Orientierung der körperfesten Basis durch eine Rotation des Körpers, dann ändern sich auch die Euler-Winkel. Folglich ist der Vektor ω , der die Rotation beschreibt, direkt mit der zeitlichen Änderung der Euler-Winkel verknüpft. Wir drücken nun die Koordinaten $\hat{\omega}_i$ des Vektors ω als Funktion der Euler-Winkel und deren Geschwindigkeiten aus.

Um das zu erreichen, entwickeln wir

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \hat{\omega}_i \hat{e}_i = \boldsymbol{\omega}_\varphi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\psi = \dot{\varphi} e_3 + \dot{\theta} e'_1 + \dot{\psi} \hat{e}_3, \quad (24)$$

als Summe dreier Rotationen um die drei Achsen der Euler-Rotation; jeder Euler-Winkel beschreibt ja eine Drehung um eine dieser Achsen, wodurch die Koordinaten von $\boldsymbol{\omega}$ direkt die Geschwindigkeiten der Euler-Winkel sind. Diese Achsen sind: (i) die Achse entlang e_3 ($\boldsymbol{\omega}_\varphi$), (ii) die Achse entlang e'_1 im 2. Schritt der Euler-Rotation ($\boldsymbol{\omega}_\theta$), und (iii) die Achse \hat{e}_3 des körperfesten Systems ($\boldsymbol{\omega}_\psi$). Um nun die Koordinaten $\hat{\omega}_i$ zu finden, ermitteln wir separat die Koordinaten der unabhängigen Rotationen $\boldsymbol{\omega}_\varphi$, $\boldsymbol{\omega}_\theta$ und $\boldsymbol{\omega}_\psi$ in der körperfesten Basis und addieren diese.

Vorweg eine weitere kleine Überlegung. Wir stellen uns vor, wir haben einen Vektor $\boldsymbol{\omega}$ und wollen diesen bezüglich zweier verschiedener Basen e_i und e'_i ausdrücken,

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i e_i = \sum_{i=1}^3 \omega'_i e'_i. \quad (25)$$

Angenommen wir kennen schon die Koordinaten ω_i und wissen, dass sich die Basis $e'_i = D e_i$ aus der Rotation D der Basis e_i ergibt, d.h. $e'_i = D e_i$. Wie lauten nun die Koordinaten ω'_i ? Wir beobachten Folgendes:

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega'_i e'_i = \sum_{i=1}^3 \omega'_i D e_i = D \sum_{i=1}^3 \omega'_i e_i \iff D^{-1} \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega'_i e_i. \quad (26)$$

Die rechte Seite bedeutet: Um die Koordinaten ω'_i in der rotierten Basis e'_i zu berechnen, können wir genauso gut den Vektor $\boldsymbol{\omega}$ *aktiv* mit der *inversen* Rotation D^{-1} rotieren, um dann die Koordinaten des rotierten Vektors $D^{-1} \boldsymbol{\omega}$ in der *alten* Basis e_i zu berechnen. Kennen wir also die Koordinatendarstellung D_{ij} von D in der Basis e_i , dann ist (Hinweis: $[D^{-1}]_{ij} = D_{ji}$ wegen $D^{-1} = D^T$)

$$\omega'_i = \sum_{j=1}^3 D_{ji} \omega_j. \quad (27)$$

Wir müssen also nur den Vektor $\boldsymbol{\omega}$ entsprechend in der Koordinatendarstellung der Basis e_i rotieren, um die Koordinaten in der neuen Basis zu erhalten. Davon werden wir jetzt reichlich Gebrauch machen!

Der Vektor ω_φ entspricht einer Rotation um die z -Achse des Beobachters (entlang e_3), also bezüglich der Basis e_i hat dieser die Koordinaten

$$\omega_\varphi = \dot{\varphi} e_3 =: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Wir wollen aus diesen Koordinaten nun die Koordinaten in der körperfesten Basis ermitteln. Die Beobachter-Basis wird durch die drei Schritte der Euler-Rotation in die körperfeste Basis überführt. Jeder Schritt führt uns in eine weitere Basis, die sich durch Rotation der vorherigen Basis um genau eine Koordinaten-Achse unterscheidet. Jeder Schritt ergibt auch andere Koordinaten des Vektors ω_φ . Um diese Serie von Koordinatentransformationen zu berechnen, wenden wir unseren Trick der inversen Rotation, siehe oben, mehrmals hintereinander an. Wir drehen in der Koordinatendarstellung (i) um die z -Achse (Winkel $-\varphi$), (ii) um die x -Achse (Winkel $-\vartheta$), und (iii) wieder um die z -Achse (Winkel $-\psi$), d.h. (rechts nach links)

$$\begin{aligned} \omega_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \\ &:= \underline{D(\varphi, \vartheta, \psi)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin \psi \sin \vartheta \\ \dot{\varphi} \cos \psi \sin \vartheta \\ \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (29)$$

$$(30)$$

Das sind folglich die Koordinaten von ω_φ im körperfesten Koordinatensystem. Die 3×3 -Matrix $D(\varphi, \vartheta, \psi)$ ist die Matrix, mit der wir jeden Vektor in raumfesten Koordinaten in körperfeste Koordinaten transformieren können.

Eine Drehung um den Winkel ϑ entspricht im Koordinatensystem des 2. Schritts der Euler-Rotation einer Drehung um die x -Achse entlang e'_1 . Wir starten also für ω_ϑ direkt bei Schritt 2 der Euler-Rotationen,

$$\omega_\vartheta = \dot{\vartheta} e'_1 =: \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Um nun diese Koordinaten im körperfesten System zu erhalten, müssen wir ω_ϑ nur noch um den Winkel $-\varphi$ um die z -Achse entlang \hat{e}_3 drehen, Schritt 3 der Euler-Rotation,

$$\omega_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\dot{\vartheta} \cos \psi \\ -\dot{\vartheta} \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Das ist die Koordinatendarstellung von ω_ϑ im körperfesten System.

Die dritte Rotationskomponente ω_ψ ist eine Drehung um die z -Achse im körperfesten System, so dass diese einfach die folgenden Koordinaten im körperfesten System hat:

$$\omega_\psi = \dot{\psi} \hat{e}_3 =: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Nehmen wir alle drei Komponenten von ω zusammen, dann erhalten wir also eine Parametrisierung von ω im körperfesten Koordinatensystem der Art:

$$\sum_{i=1}^3 \hat{\omega}_i \hat{e}_i =: \begin{pmatrix} \hat{\omega}_1 \\ \hat{\omega}_2 \\ \hat{\omega}_3 \end{pmatrix} = \omega_\varphi + \omega_\vartheta + \omega_\psi = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \\ \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi \\ \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Hiermit wird die kinetische Energie des starren Körpers schließlich

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \hat{\omega}_i^2 \hat{I}_i \quad (35)$$

$$= \frac{\hat{I}_1}{2} (\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi)^2 + \frac{\hat{I}_2}{2} (\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi)^2 + \frac{\hat{I}_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2. \quad (36)$$

1.8 Schwerer Kreisel

Als Beispiel wollen wir einen schweren, symmetrischen Kreisel betrachten. ‘‘Symmetrisch’’ bedeutet, dass wir $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$ annehmen; die Hauptträgheitsachse \hat{e}_3 bezeichnet man als *Figurenachse*. ‘‘Schwer’’ bedeutet,

dass wir als Drehpunkt einen vom Masseschwerpunkt \mathbf{R} verschiedenen Punkt im Körper wählen. Außerdem wählen wir die Basis so, dass die z -Richtung e_3 der raumfesten Basis des Beobachters gegen das homogene Erdschwerefeld zeigt.

Hierdurch vereinfacht sich Lagrange-Funktion des Kreisels zu (die \hat{I}_1 - und \hat{I}_2 -Terme in T werden zusammengefasst)

$$\mathcal{L} = \frac{\hat{I}_1}{2}(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{\hat{I}_3}{2}(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 - mgl \cos \vartheta . \quad (37)$$

Dieses System hat die drei Freiheitsgrade φ , ϑ und ψ , die die Lage des Kreisels beschreiben. Für $\vartheta = 0$ zeigt die Figurenachse nach oben. Die konstante Länge $l = |\mathbf{R}|$ bezeichnet den Abstand des Massenschwerpunkts vom Drehpunkt.

Wir sehen sofort, dass ψ und φ zyklisch sind. Also sind deren konjugierte Impulse Erhaltungsgrößen,

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \hat{I}_3(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) = \text{konst.} , \quad (38)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \hat{I}_1 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + \hat{I}_3 \cos \vartheta (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) = \hat{I}_1 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + p_\psi \cos \vartheta = \text{konst.} . \quad (39)$$

Dies formen wir nun etwas um nach

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{\hat{I}_1 \sin^2 \vartheta} =: \frac{p_\varphi - p_\psi u}{\hat{I}_1 (1 - u^2)} \quad (40)$$

und

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{\hat{I}_3} - \dot{\varphi} u = \frac{p_\psi}{\hat{I}_3} + \frac{p_\psi u^2 - p_\varphi u}{\hat{I}_1 (1 - u^2)} . \quad (41)$$

Wir haben hier $u := \cos \vartheta$ ersetzt, weil uns aufgefallen ist, dass ϑ nur als Funktion $\cos \vartheta$ in den Impulsen vorkommt. Die letzten zwei Gleichungen können wir benutzen, um die Bahnen von φ und ψ zu berechnen,

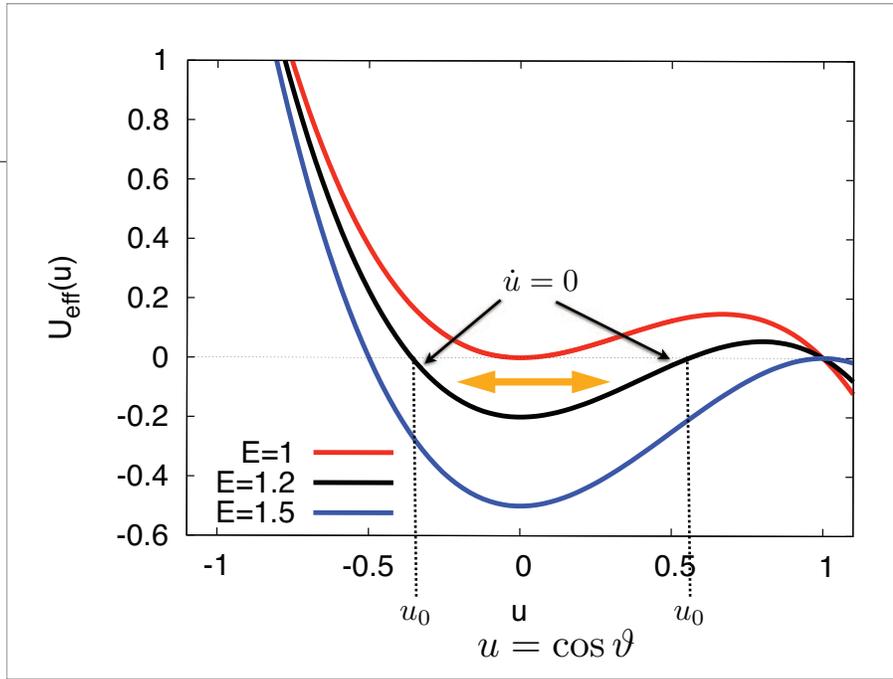
$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t dt' \dot{\varphi} = \int_{t_0}^t dt' \frac{p_\varphi - p_\psi u(t')}{\hat{I}_1 (1 - u(t')^2)} , \quad (42)$$

$$\psi(t) - \psi(t_0) = \int_{t_0}^t dt' \dot{\psi} = \int_{t_0}^t dt' \left(\frac{p_\psi}{\hat{I}_3} + \frac{p_\psi u(t')^2 - p_\varphi u(t')}{\hat{I}_1 (1 - u(t')^2)} \right) , \quad (43)$$

sobald wir die Bahn $u(t)$ gefunden haben.

Die Gesamtenergie des Kreisels berechnen wir mit den erhaltenen Impulsen durch Einsetzen zu:

$$E = T + mgl u = \frac{\hat{I}_1}{2} \dot{\vartheta}^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi u)^2}{2\hat{I}_1 (1 - u^2)} + \frac{p_\psi^2}{2\hat{I}_3} + mgl u . \quad (44)$$



Wir bemerken hier

$$\dot{u}^2 = \left(\frac{d \cos \vartheta}{dt} \right)^2 = \dot{\vartheta}^2 \sin^2 \vartheta = \dot{\vartheta}^2 (1 - u^2) \iff \dot{\vartheta}^2 = \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2}, \quad (45)$$

so dass man die (erhaltene) Gesamtenergie als Funktion von u und \dot{u} schreiben kann,

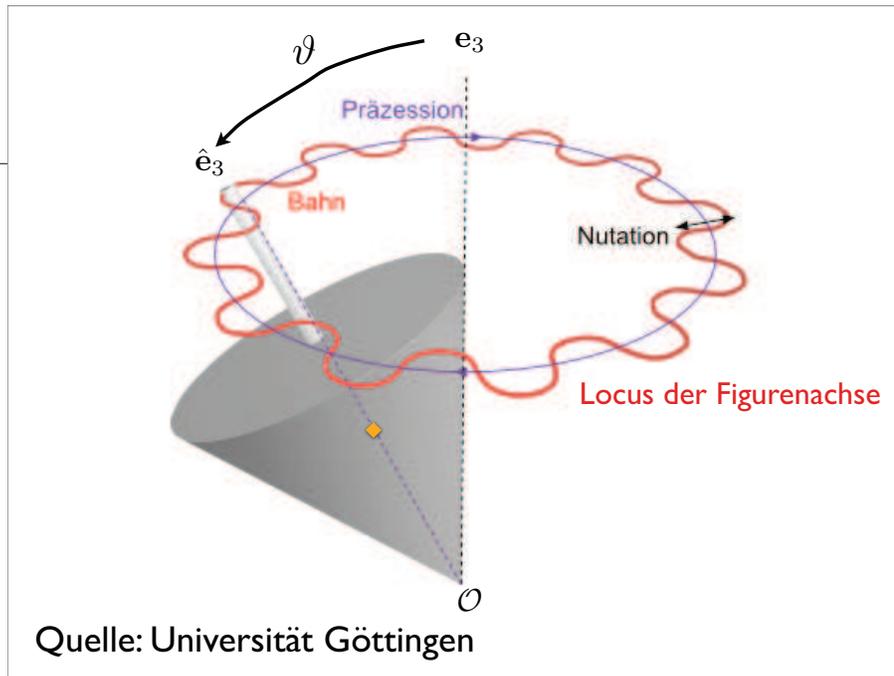
$$E = \frac{\hat{I}_1}{2} \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2} + \frac{(p_\varphi - p_\psi u)^2}{2\hat{I}_1(1 - u^2)} + \frac{p_\psi^2}{2\hat{I}_3} + mgl u. \quad (46)$$

Dies erinnert uns sehr an das Einkörperproblem, insbesondere wenn wir diese Gleichung nochmals etwas umformen,

$$\frac{\hat{I}_1}{2} \dot{u}^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi u)^2}{2\hat{I}_1} + \frac{p_\psi^2(1 - u^2)}{2\hat{I}_3} + mgl u(1 - u^2) - E(1 - u^2) =: \frac{\hat{I}_1}{2} \dot{u}^2 + \underline{U_{\text{eff}}(u)} = 0. \quad (47)$$

Formal ist die Bewegungsgleichung von u demnach wie die eines Punktteilchens mit Masse \hat{I}_1 im effektiven Potenzial $U_{\text{eff}}(u)$ (unterstrichen). Beachte aber, dass die “Gesamtenergie” $\hat{I}_1 \dot{u}^2 / 2 + U_{\text{eff}}(u)$ dieses äquivalenten Einkörperproblems nur einen Wert, nämlich Null, hat. Hieraus erhalten wir ein Integral für die Umkehrfunktion von $u(t)$,

$$t - t_0 = \pm \int_{u_0}^u \frac{du'}{\sqrt{-2U_{\text{eff}}(u')}}. \quad (48)$$



Die Bewegungsgleichungen des schweren Kreisel sind somit vollständig integrabel (aber i.A. nicht analytisch lösbar).

Wie beim Einkörperproblem definieren (benachbarte) Punkte u_0 mit $U_{\text{eff}}(u_0) = 0$ Umkehrpunkte, bei denen \dot{u} das Vorzeichen ändern muss; u wird also zwischen den Umkehrpunkten periodisch hin und her oszillieren (\pm bestimmt die Laufrichtung von u). Die Neigung des Kreisel bzw. die der Figuren- oder Symmetrieachse \hat{e}_3 wird deshalb periodisch schwanken (ϑ ist der Winkel zwischen e_3 und \hat{e}_3). Diese Schwankung nennt man *Nutation* des Kreisel. Die Amplitude der Nutation wird durch den Winkelabstand der Umkehrpunkte $u_0 = \cos \vartheta_0$ bestimmt; ω_ϑ ändert den Nutationswinkel. Gleichzeitig wird die Figuren- oder Symmetrieachse eine Kreisbewegung um e_3 beschreiben, die man als *Präzession* bezeichnet. Diese Rotation ist mit ω_φ und damit p_φ verknüpft. Die Rotation ω_ψ ist eine Bewegung um die Figuren- oder Symmetrieachse \hat{e}_3 , so dass p_ψ mit der Rotation des Kreisel um die eigene Symmetrieachse verknüpft ist. Die Überlagerung von Präzessions- und Nutationsbewegung lässt die Symmetrieachse u.U. komplexe Bewegungsmuster beschreiben, die hier aber nicht näher diskutiert werden sollen (siehe z.B. [1]).

1.9 Freie starre Körper

Die vorangegangene Diskussion der starren Körper ist davon ausgegangen, dass der Körper im Drehpunkt festgehalten wird; der Schwerpunkt kann sich dann nur mit $|\mathbf{R}| = \text{konst}$ bewegen. Dadurch sind die drei Euler-Winkel die einzigen Freiheitsgrade des Problems.

Im allgemeineren Fall jedoch wird sich der Schwerpunkt \mathbf{R} des starren Körpers frei bewegen können, so dass dieser nicht automatisch von den Euler-Winkel abhängt. In diesem Moment erhalten wir drei weitere Freiheitsgrade, die die Translation des Schwerpunktes beschreiben. Das Problem des freien starren Körpers hat also insgesamt sechs Freiheitsgrade: drei Koordinaten der Rotation (Euler-Winkel) und drei Koordinaten der Translation (Position von \mathbf{R}). Ein frei beweglicher starrer Körper wird um den Schwerpunkt \mathbf{R} rotieren. In diesem Fall ist Lagrange-Funktion eine Summe der Translationsenergie des Schwerpunktes und der Rotationsenergie um den Schwerpunkt, d.h.

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2} |\dot{\mathbf{R}}|^2 + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}' \boldsymbol{\omega} \rangle - U(\mathbf{R}, \varphi, \vartheta, \psi), \quad (49)$$

wobei die Rotationsenergie $T_{\text{rot}} = \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}' \boldsymbol{\omega} \rangle / 2$ wie oben in der körperfesten Basis als Funktion der Euler-Winkel ausgedrückt wird. Der Trägheitstensor ist der relativ zum Schwerpunkt. Wir können das auch so sehen: Für jeden Körper, der nicht als Punktmasse approximiert werden kann, aber zumindest starr ist, addieren wir einen zusätzlichen Term T_{rot} zur Lagrange-Funktion, um die inneren Freiheitsgrade der Orientierung zu berücksichtigen; als einzige Zusatzinformation über die Massenverteilung im Körper werden die Hauptträgheitsmomente \hat{I}_i benötigt.

Im Falle eines *inhomogenen Kraftfelds* können der Schwerpunkt und das Massenzentrum \mathbf{R} verschieden sein, siehe Abschnitt 1.3; die potenzielle Energie U vermischt dann die Translationskoordinaten von \mathbf{R} und die Euler-Winkel der Orientierung des Körpers. Dann kann auch auf einen freien Körper ein Drehmoment $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}}$ relativ zum Drehpunkt \mathbf{R} wirken. Hierdurch kann auch dieser, trotz einer freien Bewegung, eine Präzession und Nutation vollführen! Dies ist z.B. bei der Erde der Fall, die in 1. Näherung als freier starrer Körper betrachtet werden kann. Durch das inhomogene Gezeitenfeld des Mondes und der Sonne beschreibt die Erde eine Präzessions- und eine (kleine) Nutationsbewegung. Die Präzession bewegt die Erdfigurenachse etwa um 1.4° pro Jahrhundert, wodurch zum selben Tag des Jahres z.B. die



Quelle: Bild, Axel-Springer Verlag, Dez. 2010

Sonne vor etwa 2000 Jahren eine $\sim 28^\circ$ andere Position zum Fixsternhimmel hatte als heute. Der griechische Naturphilosoph Hipparchos (*190 v.Ch.-† 120 v.Ch.) schätzte diesen Effekt schon vor ~ 2200 Jahren aufgrund von Beobachtungen auf ca. 1° pro Jahrhundert.

Sollte der starre Körper zwar eine Translationsbewegung ausführen können, aber rotiert dieser dabei nicht um den Schwerpunkt sondern um einen anderen Drehpunkt (z.B. rollender Zylinder mit Umwucht), dann drückt man \mathcal{L} als Funktion der Position des Drehpunktes $\mathbf{D} = \mathbf{R} + \mathbf{d}$ aus; \mathbf{d} ist der Abstandsvektor des Drehpunkts vom Schwerpunkt. In diesem allgemeineren Fall wird die Lagrange-Funktion durch Substitution der obigen mit $\mathbf{R} = \mathbf{D} - \mathbf{d}$ zu:

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2} |\dot{\mathbf{D}}|^2 - \underline{M \langle \dot{\mathbf{D}}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d} \rangle} + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \rangle - U(\mathbf{D} - \mathbf{d}, \varphi, \vartheta, \psi), \quad (50)$$

wobei \mathbf{I} hier das Trägheitsmoment um den Drehpunkt ist; der unterstrichene Term ist ein Mischterm zwischen Translation $\dot{\mathbf{D}}$ und der Rotation $\dot{\mathbf{d}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}$; \mathbf{d} hängt von der Orientierung ab. Ist das Kraftfeld praktisch homogen über die Ausdehnung des Körpers, dann ist $U(\mathbf{D} - \mathbf{d}, \dots) \approx U(\mathbf{D})$.

Literatur

- [1] F. Kuypers. *Klassische Mechanik: mit über 300 Beispielen und Aufgaben mit Lösungen*. Lehrbuch Physik. John Wiley & Sons, Limited, 2008.