universitätbonn

Rheinische
Friedrich-Wilhelms-
Universität Bonn

Klassische Theoretische Physik: Mechanik

Patrick Simon

Argelander-Institut für Astronomie

Auf dem Hügel 71

psimon@astro.uni-bonn.de

21. November 2013

1 Hamiltonsches Prinzip

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lassen sich ohne des D'Alembertschen Prinzips auch aus einem fundamentaleren Prinzip ableiten, das wir das *Hamiltonsche Prinzip* oder das Prinzip der kleinsten/stationären Wirkung nennen. Mathematisch ist dies eine andere Herleitung der klassischen Mechanik. Diese bietet erstmal keinen praktischen Vorteil in der Behandlung von konkreten Problemen. Vom theoretischen Standpunkt aus gesehen allerdings, wirft dieses Prinzip jedoch ein neues Licht auf die Natur physikalischer Gesetze und schlägt darüber hinaus eine Brücke zur Quantenmechanik.

1.1 Variationsrechnung

Zum Einstieg diskutieren wir hier ein typisches Problem der Variationsrechnung. Wir betrachten eine stetige und differenzierbare Funktion $f(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, die durch zwei feste Punkte $Y_1 = f(X_1)$ und $Y_2 = f(X_2)$ bei X_1 und X_2 gehen soll. Wir fragen uns, wie die Kurve $(x, f(x))$ zwischen den Punkten $X_1 < x < X_2$ verlaufen muss, damit ihre Länge minimal wird. Wir können die Antwort eigentlich schon raten: $f(x)$ ist eine Grade. Aber wir wollen beweisen, dass die Grade von allen möglichen $f(x)$ wirklich die kürzeste Länge hat.

Dieses Problem ist wahrscheinlich anders als die Extremwertprobleme, denen Sie bisher begegnet sind. Bisher wurden in diese Fragestellungen vermutlich immer auf eine Funktion $F(\boldsymbol{y})$ *endlich* vieler Unbekannten $\boldsymbol{y}$ zurückgeführt, die so gewählt werden müssen, dass die Funktion F extremal wird. Eine notwendige Bedingung lokaler Extrema ist bekanntlich ein verschwindender Gradient $\nabla F(\boldsymbol{y}) = 0$ am Punkt eines Extremums, was der übliche Lösungsansatz ist. Das Problem hier ist nun etwas komplizierter: Wir haben überabzählbar viele Unbekannte – die Werte der Funktion bei $y = f(x)$ – die gefunden werden müssen, um die Gesamtlänge $F[f(x)] \in \mathbb{R}^{>0}$ zu minimieren; jeder Wert $f(x)$ bei $x \in]X_1, X_2[$ ist eine Unbekannte.

Bevor wir uns über die Lösung Gedanken machen, müssen wir das Problem erst mal sauber definieren. Beginnen wir mit einer Näherung. Wir denken uns N Stützpunkte x_i mit $X_1 = x_0 < x_i < x_{N+1} = X_2$ und $i = 1 \dots N$, an denen wir die Werte $y_i = f(x_i)$ der gesuchten Funktion bestimmen wollen. Die x_i seien sortiert, d.h. $x_i < x_{i+1}$. Der Abstand der direkten Nachbarn x_i und x_{i+1} ist konstant, d.h. $x_{i+1} - x_i = \Delta x = (X_2 - X_1)/N$.

Wir verbinden nun alle benachbarte Punkte (x_i, y_i) mit Linien, um einen Approximation von $f(x)$ zu erhalten. Die Gesamtlänge aller Verbindungslinien ist

$$F_N[y_i; x_i] = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{\Delta x^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} = \Delta x \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{1 + \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{\Delta x^2}} \;, \quad (1)$$

mit festen Werten an den Endpunkten $y_0 = Y_1$ und $y_{N+1} = Y_2$. Diese Kurvenlänge hat N endlich viele Unbekannte y_i. In dieser Näherung sieht das Problem der Minimallänge so aus wie das oben besprochene mit endlich vielen Unbekannten y_i. Aber eigentlich interessieren wir uns doch für den Grenzfall

$$F[f(x)] = \lim_{N\to\infty} F_N[y_i; x_i] = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta x \sqrt{1 + \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{\Delta x^2}} = \int_{X_1}^{X_2} \mathrm{d}x \, \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \;\; ; \;\; f'(x) := \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \quad (2)$$

und Lösungen $f(x)$, die dieses sogenannte *Funktional* $F[f(x)]$ extremal werden lassen. Ein Funktional bildet eine gesamte Funktion auf $\mathbb{R}$ ab. Verwendet haben wir hier neben der Definition des Riemann-Integrals ("Reihe von infinitisimalen Größen") die Definition des Differenzenquotienten

$$\lim_{\Delta x\to\infty} \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to\infty} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} = f'(x_i) \;. \quad (3)$$

Wie finden wir eine Funktion $f(x)$, die $F[f(x)]$ extremal werden läßt? Im Falle der Näherung $F_N[y_i; x_i]$ wäre dies klar. Wir würden nach y_i mit den Eigenschaften

$$\frac{\partial F_N[y_i; x_i]}{\partial y_i} = 0 \;\; \forall y_1, \ldots, y_N \quad (4)$$

suchen. Wir wissen aber nicht, wie wir Gradienten $F[f(x)]$ bezüglich $f(x)$ zu bilden haben. Deswegen sehen wir uns nochmal den Fall der Näherung F_N an: Haben wir für F_N die Extremwerte $\hat{y}_i$ gefunden, dann sagt uns die Bedingung (4) auch, dass eine kleine Variation δy_i beim Extremum $\hat{y}_i$ den Wert von F_N nicht in linear Ordnung verändern wird, d.h. (Taylor-Reihe bei $\hat{y}_i$)

$$F_N[\hat{y}_i + \epsilon\delta y_i; x_i] = F_N[\hat{y}_i; x_i] + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial F_N[\hat{y}_i; x_i]}{\partial \hat{y}_i} \delta y_i \epsilon + O(\epsilon^2) = F_N[\hat{y}_i; x_i] + O(\epsilon^2) \;. \quad (5)$$

Dies ist nun aber eine alternative Bedingung der Extremwerte $\hat{y}_i$, die wir auf $F[f(x)]$ übertragen können. Nehmen wir nämlich an, wir haben eine Extremalkurve $\hat{f}(x)$ des Funktionals $F[f(x)]$ gefunden, dann erwarten wir, dass eine kleine Variation dieser Kurve,

$$f(x,\epsilon) = \hat{f}(x) + \epsilon\delta f(x)\;, \tag{6}$$

mit jeder *beliebigen* Variation $\delta f(x)$ – auch eine Funktion von x – das Funktional $F[f(x,\epsilon)]$ in linear Ordnung in ϵ konstant hält, d.h.

$$F[\hat{f}(x) + \epsilon\delta f(x)] = F[\hat{f}(x)] + \mathcal{O}(\epsilon^2)\;. \tag{7}$$

Da die Randwerte bei X_1 und X_2 gegeben sind, soll die Variation allerdings dort mit $\delta f(x) = 0$ verschwinden; $f(x)$ ist fest vorgegeben an den Eckpunkten. Anders ausgedrückt: Wir suchen Extremalkurven $\hat{f}(x)$ mit $\hat{f}(X_1) = Y_1$ und $\hat{f}(X_2) = Y_2$, die

$$\left.\frac{\mathrm{d}F[\hat{f}(x) + \epsilon\delta f(x)]}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0 \;\;\forall\delta f(x) \tag{8}$$

erfüllen. Die Betonung liegt auf "für beliebigen Variationen $\delta f(x)$" (mit Randbedingungen).

Dies probieren wir jetzt für unserer Eingangsproblem der kürzesten Verbindung zweier Punkte aus:

$$\frac{\mathrm{d}F[\hat{f}(x) + \epsilon\delta f(x)]}{\mathrm{d}\epsilon} = \int_{X_1}^{X_2}\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\sqrt{1 + [\hat{f}'(x) + \epsilon\,\delta' f(x)]^2} = \int_{X_1}^{X_2}\mathrm{d}x\,\frac{\hat{f}'(x)\delta' f(x) + 2\epsilon[\delta' f(x)]^2}{\sqrt{1 + [\hat{f}'(x) + \epsilon\,\delta' f(x)]^2}}\;. \tag{9}$$

Bei $\epsilon = 0$ entspricht dies

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}F[\hat{f}(x) + \epsilon\delta f(x)]}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} &= \int_{X_1}^{X_2}\mathrm{d}x\,\frac{\hat{f}'(x)}{\sqrt{1 + [\hat{f}'(x)]^2}}\delta' f(x) = \int_{X_1}^{X_2}\mathrm{d}x\,\frac{\hat{f}'(x)}{\sqrt{1 + [\hat{f}'(x)]^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta f(x) && (10)\\
&= \int_{X_1}^{X_2}\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\hat{f}'(x)}{\sqrt{1 + [\hat{f}'(x)]^2}}\delta f(x)\right] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\hat{f}'(x)}{\sqrt{1 + [\hat{f}'(x)]^2}}\right]\delta f(x)\right) && (11)\\
&= \underline{\left[\frac{\hat{f}'(x)}{\sqrt{1 + [\hat{f}'(x)]^2}}\delta f(x)\right]\Bigg|_{X_1}^{X_2}} - \int_{X_1}^{X_2}\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\hat{f}'(x)}{\sqrt{1 + [\hat{f}'(x)]^2}}\right]\delta f(x) && (12)\\
&= -\int_{X_1}^{X_2}\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\hat{f}'(x)}{\sqrt{1 + [\hat{f}'(x)]^2}}\right]\delta f(x)\;. && (13)
\end{aligned}$$

Der unterstrichene Term in der vorletzten Zeile verschwindet, weil eine Variation an den Eckpunkten nicht erlaubt ist, $\delta f(X_1) = \delta f(X_2) = 0$. In der obigen Rechnung haben wir die Integration ab der zweiten Zeile partiell ausgeführt, um die Ableitung $\delta' f(x)$ der Variation beseitigen zu können. Im Gegensatz zu $\delta f(x)$ sind nämlich die Variationen von $\delta' f(x)$ bei unterschiedlichen Werten x nicht unabhängig voneinander; der Differentialkoeffizient der Ableitung kombiniert benachbarte unabhängige Variationen $\delta f(x)$.

Da $F[f(x,\epsilon)]$ für beliebige Variationen $\delta f(x)$ in 1. Näherung verschwinden soll, muss nun der Faktor vor $\delta f(x)$ im Integranten der letzten Zeile der obigen Gleichung für alle $x \in [X_1, X_2]$ verschwinden,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\hat{f}'(x)}{\sqrt{1+[\hat{f}'(x)]^2}}\right] = 0 \tag{14}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\hat{f}'(x)}{\sqrt{1+[\hat{f}'(x)]^2}} = \text{konst.} =: C \tag{15}$$

$$\Longrightarrow \quad [\hat{f}'(x)]^2 = C^2(1+[\hat{f}'(x)]^2) \tag{16}$$

$$\Longleftrightarrow \quad [\hat{f}'(x)]^2 = \frac{C^2}{1-C^2} = \text{konst.}\ . \tag{17}$$

Dies ist nur möglich, wenn die erste Ableitung von $f(x)$ eine Konstante ergibt, d.h. $\hat{f}'(x) = \text{konst.}$, was nur für eine Grade $\hat{f}(x) = ax + b$ mit den Konstanten a und b erfüllt werden kann.

Wir haben also durch Variation der Lösungskurve bewiesen, dass eine Grade die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist! Zur genauen Bestimmung der Graden, muß man noch die Randbedingungen bei X_1 und X_2 berücksichtigen. Uns reicht hier die Feststellung, dass das Variationsproblem auf eine Differentialgleichung zurückgeführt wurde; wir sind das Funktional $F[f(x)]$ selbst dadurch los geworden.

Die hier durchgeführten Rechenschritte werden in der Theorie der *Funktionalableitungen* formalisiert, die wir an dieser Stelle nicht wiedergeben können. Wir weisen hier nur noch auf eine wichtige Relation hin, die man sich merken sollte:

$$\delta' f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta f(x) = \delta\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \delta f'(x)\ . \tag{18}$$

Die Ableitung einer Variation entspricht also der Variation der Ableitung. Folglich ist auch

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\delta f(x) = \delta\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}\ . \tag{19}$$

1.2 Prinzip der stationären Wirkung

Im letzten Abschnitt wurde ein Variationsproblem besprochen, bei dem das Funktional nur eine Funktion der Ableitung $f'(x)$ war. Um zu sehen, was Variationsprobleme mit der klassischen Mechanik zu tun haben, betrachten wir nun ein allgemeineres Problem

$$S\,[\boldsymbol{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\,\Phi\Big(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t\Big)\;, \tag{20}$$

bei dem ein Funktional S von unseren generalisierten Koordinaten $\boldsymbol{q} = (q_1, \dots, q_{N_k})$ und deren Entwicklung $\boldsymbol{q}(t)$ mit der Zeit t abhängen soll; S gibt uns also für jede gegebene Kurve $\boldsymbol{q}(t)$ zwischen $t_0 \leq t \leq t_1$ einen Wert. Dieser Wert wird durch die Funktion Φ im Integranten bestimmt. Wir wollen den Integranten unbestimmt lassen, um ein allgemeines Variationsproblem zu lösen.

Wir fragen uns, wie die Kurve $\boldsymbol{q}(t)$ gewählt werden muss, um einen Extremwert für $S\,[\boldsymbol{q}(t)]$ zu erhalten. Wir gehen genauso wie eben vor und variieren eine Kurve $\hat{q}_i(t)$ durch

$$q_i(t,\epsilon) = \hat{q}_i(t) + \epsilon\delta q_i(t)\;. \tag{21}$$

Hierdurch wird (wir setzen hier $\hat{q}_i = q_i$ und schreiben das Argument von $\Phi(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t)$ im Integranten nicht aus; $\delta'\boldsymbol{q}(t) = \mathrm{d}\delta\boldsymbol{q}(t)/\mathrm{d}t$)

$$\left.\frac{\mathrm{d}S\,[\boldsymbol{q}(t) + \epsilon\delta\boldsymbol{q}(t)]}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\;\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\Phi\Big(\boldsymbol{q}(t) + \epsilon\delta\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t) + \epsilon\delta'\boldsymbol{q}(t), t\Big)\right|_{\epsilon=0} \tag{22}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\;\sum_{i=1}^{N_k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}\delta q_i(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_i}\delta' q_i(t)\right) \tag{23}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\;\sum_{i=1}^{N_k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}\delta q_i(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i(t)\right) \tag{24}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\;\sum_{i=1}^{N_k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}\delta q_i(t) - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_i}\right]\delta q_i(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i(t)\right]\right) \tag{25}$$

$$= \underline{\left.\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i(t)\right)\right|_{t_0}^{t_1}} + \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\;\sum_{i=1}^{N_k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i(t)\;. \tag{26}$$

Der erste unterstrichene Term verschwindet wieder, weil die Variation $\delta q_i(t)$ an den Randpunkten t_0 und t_1 nach Definition null ist. Damit der zweite Term für beliebige Variationen $\delta q_i(t)$ verschwindet, muss der

Ausdruck in der Klammer null sein, also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\Phi}{\partial q_i} = 0 \;\; \forall i \; . \tag{27}$$

Wir beobachten nun mit Erstaunen, dass diese Differentialgleichungen formal mit den ELG2 identisch sind, die wir aus dem D'Alembertschen Prinzip und den Newtonschen Axiomen abgeleitet haben. Ersetzen wir nämlich $\Phi = \mathcal{L}$, dann erhalten wir

$$S[\boldsymbol{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \, \mathcal{L}(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t) = \text{stationär} \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \;\; \forall i \; . \tag{28}$$

Die Lösungen der ELG2 mit den Randbedingungen $\boldsymbol{q}(t_0)$ und $\boldsymbol{q}(t_1)$ sind also genau die Kurven $\boldsymbol{q}(t)$, bei denen das obige Funktional $S[\boldsymbol{q}(t)]$ stationär wird; eine Variation von $S[\boldsymbol{q}(t)]$ an dieser Stelle ändert in 1. Ordnung das Funktional nicht. Wir nennen dieses Funktional die *Wirkung* der Kurve $\boldsymbol{q}(t)$. Da die Wirkung häufig ein Minimum als lokales Extremum hat, nennen wir diesen Ansatz das Prinzip der kleinsten Wirkung. Wir schreiben dies auch als $\delta S[\boldsymbol{q}(t)] = 0$.

Zusammenfassen kann man also sagen, wir haben gezeigt, dass wir mithilfe der ELG2 letztlich nur die kürzeste Verbindung zweier Randpunkt $\boldsymbol{q}(t_0)$ und $\boldsymbol{q}(t_1)$ berechnen. Die Länge zweier benachbarter Punkte $\boldsymbol{q}(t+\mathrm{d}t)$ und $\boldsymbol{q}(t)$ wird hierbei mit der Metrik bzw. infinitsimalen Wirkung $\mathcal{L}(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t)\mathrm{d}t$ gemessen.

Anmerkung Dieses Prinzip ist, soweit wie es beurteilen können, fundamental. Wir können die klassische Bewegungsgleichungen von Teilchen und sogar die Bewegungsgleichungen von Kraftfeldern darauf reduzieren (Feldtheorien). Wie in der klassischen Physik lassen sich auch die Bewegungsgleichungen der Wellenfunktionen und Quantenfelder in der Quantenmechanik hierauf zurückführen. Richard P. Feynman (*1918–†1988) konnte außerdem zeigen, dass die Wirkungen $S[\boldsymbol{q}(t)]$ *aller* Wege $\boldsymbol{q}(t)$, die zwei Punkte $\boldsymbol{q}(t_0)$ und $\boldsymbol{q}(t_1)$ verbinden, die quantenmechanische Wahrscheinlichkeit bestimmt, mit der ein Teilchen, das bei $\boldsymbol{q}(t_0)$ beobachtet wurde, wieder bei $\boldsymbol{q}(t_1)$ beobachtet werden kann. Die Bewegung von Teilchen in der klassischen Mechanik hingegen wird nur von dem einzigen Weg $\boldsymbol{q}(t)$ bestimmt, der durch $\delta S[\boldsymbol{q}(t)] = 0$ gegeben ist.

Im Rahmen des Hamiltonschen Prinzips wird die Eichinvarianz der Lagrange-Funktion sehr offensichtlich. Addieren wir eine totale Zeitanleitung $\mathrm{d}F(\boldsymbol{q},t)/\mathrm{d}t$ zu $\mathcal{L}$, dann ändert sich die Wirkung

$$S[\boldsymbol{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\,\mathcal{L}(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t),t) + \underline{F(\boldsymbol{q}(t),t)|_{t_0}^{t_1}} \tag{29}$$

nur an den Randpunkten (unterstrichener Term). Diese sind bei einer Variation aber fest, so dass sich wieder die ursprünglichen Bewegungsgleichungen für q_i ergeben. Übrigens geht das nur, wenn $\mathrm{d}F(\boldsymbol{q},t)/\mathrm{d}t$ i.A. keine Funktion der Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{q}}$ ist.

1.3 Euler-Lagrange-Gleichungen 1. Art*

Mittels des Hamiltonischen Prinzips können wir auch Bewegungsgleichungen für Probleme 1. Art herleiten. Dieses sind mechanische Probleme mit Zwangsbedingungen, bei denen wir keine generalisierten Koordinaten finden können, die alle Zwangsbedingungen automatisch erfüllen. Darüber hinaus lassen sich mit diesem Ansatz auch u.U. nicht-holonome Probleme lösen.

Wir stellen uns also vor, wir haben trotz der generalisierten Koordinaten $\boldsymbol{q}$ noch N_z, i.A. nicht-holonome Zwangsbedingungen ($\dot{\boldsymbol{q}}$ enthalten),

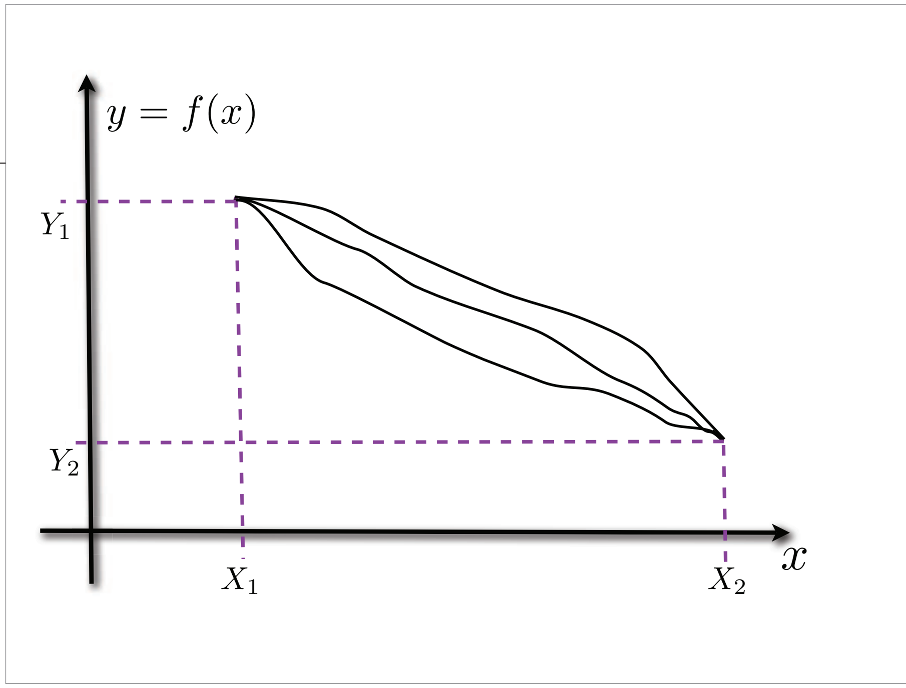
$$f_i(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = 0 \;\; \forall i = 1\ldots N_z\;, \tag{30}$$

die mit der Problemstellung verknüpft sind. Die Bewegungsgleichung ergeben sich hier immer noch aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung $\delta S[\boldsymbol{q}(t)]$, aber nun mit den Nebenbedingungen in Gl. (30).

Ein Extremwertproblem mit Nebenbedingungen kann man mithilfe der Methode der *Lagrangeschen Multiplikatoren* lösen, wobei für jede Nebenbedingung eine neue Variable λ_i eingeführt wird. In unserem Fall der funktionalen Beschreibung der Wirkung haben wir N_z Nebenbedingungen für *jeden beliebigen Zeitpunkt t*; $\boldsymbol{q}(t)$ und $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ sind bei jedem t eingeschränkt. Wir brauchen deshalb einen Multiplikator $\lambda_i(t)$ für jeden Zeitpunkt; $\lambda_i(t)$ wird dadurch zeitabhängig. Folgen wir hiermit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren, dann lautet das Variationsproblem nun

$$\delta S[\boldsymbol{q}(t),\boldsymbol{\lambda}(t)] = \delta\left[\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\left(\mathcal{L}(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t),t) - \sum_{i=1}^{N_z}\lambda_i(t)\,f_i(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\right)\right] = 0\;. \tag{31}$$

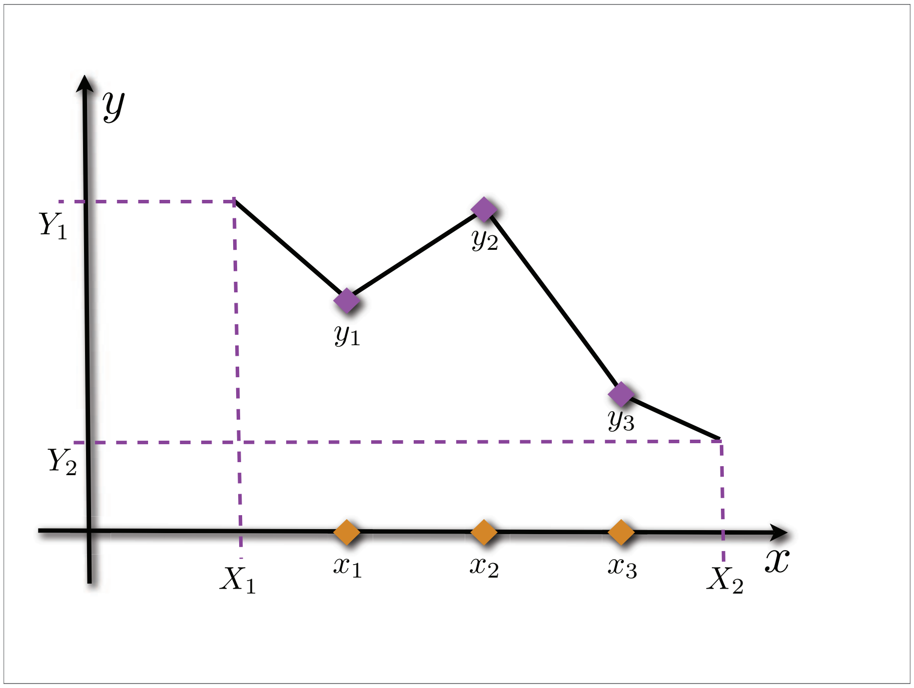
Genauso wie bei die Koordinaten $\boldsymbol{q}(t)$ müssen wir jetzt $\lambda_i(t)$ variieren, um die Funktionen $\hat{\boldsymbol{q}}(t)$ und $\hat{\lambda}_i(t)$ zu finden, bei denen $S[\boldsymbol{q}(t),\boldsymbol{\lambda}(t)]$ extremal wird. Die Bewegungsgleichungen für $\lambda_i(t)$, die sich aus dem



Variationsprinzip ergeben, sind einfach die Gleichungen (30). Die neuen Bewegungsgleichungen für $q_i(t)$ sind nach wie vor durch die allgemeine Lösung Gl. (27) gegeben, oder

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} + \underline{\sum_{i=1}^{N_z}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda_i(t)\frac{\partial f_i}{\partial\dot{q}_i}\right) - \lambda_i(t)\frac{\partial f_i}{\partial q_i}\right]} = 0 \quad \forall i \; . \tag{32}$$

Wir sehen also, man muss für jede Zwangsbedingung, die nicht durch die richtige Wahl der generalisierten Koordinaten beseitigt werden kann, eine zusätzliche Lösung $\lambda_i(t)$ finden. Diese sind eindeutig durch die Nebenbedingungen $f_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = 0$ bestimmt. Der neue Term in den Bewegungsgleichungen der q_i entspricht der generalisierten Zwangskraft aller N_z Nebenbedingungen (unterstrichen).



y
Y_1
y_2
y_1
y_3
Y_2
X_1
x_1
x_2
x_3
X_2
x