universitätbonn

Rheinische
Friedrich-Wilhelms-
Universität Bonn

Klassische Theoretische Physik: Mechanik

Patrick Simon

Argelander-Institut für Astronomie

Auf dem Hügel 71

psimon@astro.uni-bonn.de

27. Januar 2014

1 Erhaltungsgrößen

Unsere Situation ist nun die Folgende. Um die Dynamik eines Systems von N Teilchen unter Zwangsbedingungen zu beschreiben (holonom; hier: nur 2. Art), stellen wir

1. die Lagrange-Funktion $\mathcal{L} = T - U$ des Systems auf;
2. führen einen Satz generalisierter Koordinaten q_i ein, die die Zwangsbedingungen $I_i(\boldsymbol{z}, t) = 0$ erfüllen (Anzahl k), und
3. erhalten für die q_i mit den ELG2 $N_k = 3N - k$ Differentialgleichungen 2. Ordnung in der Zeit t.
4. Die Bahnen $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{q}(t), t)$ sind dann formal durch die Lösungen $\boldsymbol{q}(t)$ bestimmt.

Der letzte Schritt (4) ist üblicherweise der, der am meisten Schwierigkeiten bereitet bzw. der analytisch nicht möglich ist. (Mittels numerischer Methoden kann man natürlich immer die Bewegungsgleichungen für *konkrete* Anfangsbedingungen oder Randbedingungen mit einer technisch begrenzten Genauigkeit lösen. Die analytische allgemeine Form der Lösungen ist aber vom theoretischen Standpunkt her interessanter.)

Wir hatten bei der Diskussion des Zweikörperproblems gesehen (Abschnitt **??**), dass die Kenntnis von Erhaltungsgrößen, wie die der Energie oder des Drehimpulses, die Anzahl der freien Variablen des Problems reduziert. Dadurch wird es z.B. im Zweikörperproblem möglich, die Lösungen direkt durch Integrale auszudrücken. Deswegen sollte man so viele Erhaltungsgrößen wie möglich für ein gegebenes Problem finden. Außerdem verraten die Erhaltungsgrößen uns auch etwas über die Eigenschaften der Lösungen, ohne dass wir die Bewegungsgleichungen direkt lösen müssen. Wir beschäftigen uns hier mit dem Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen und den mathematischen Eigenschaften der Lagrange-Funktion.

1.1 Anzahl möglicher Erhaltungsgrößen

Definition. *Wir verstehen unter einer Erhaltungsgröße eine Funktion $I(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ der Koordinaten $\boldsymbol{q}$ und der Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{q}}$, die entlang der Trajektorie $\boldsymbol{q}(t)$ konstant bzw. erhalten ist, d.h.*

$$\frac{\mathrm{d}I(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)}{\mathrm{d}t} = 0 \;\; \forall t \; . \tag{1}$$

Wieviele Erhaltungsgrößen lassen sich für ein System mit N Teilchen und k Zwangsbedingungen finden? Zunächst stellen wir fest: Um ein System von N_k Differentialgleichungen 2. Ordnung eindeutig zu lösen, benötigt man $2N_k$ Integrationskonstanten. Diese können z.B. die Anfangsbedingungen $\boldsymbol{q}_0 := (\boldsymbol{q}(t_0), \dot{\boldsymbol{q}}(t_0))$ zum Zeitpunkt t_0 sein. Die eindeutige Lösung kann deshalb als Funktion von $\boldsymbol{q}_0$ folgendermaßen geschrieben werden:

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}_0, t) \;\; ; \;\; \dot{\boldsymbol{q}}(t) = \dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}_0, t) \; . \tag{2}$$

Das folgt aus dem Satz der eindeutigen Lösbarkeit von Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Die Anfangsbedingungen $\boldsymbol{q}_0$ selbst sind trivialerweise Erhaltungsgrößen! Betrachten wir nämlich einen beliebigen Zeitpunkt t_1 der Lösung $\boldsymbol{q}(t)$, die durch $\boldsymbol{q}_0$ gegeben ist, dann können wir aus den Werten $\boldsymbol{q}(t_1)$ und $\dot{\boldsymbol{q}}(t_1)$ bei t_1 wieder eine eindeutige Lösung der ELG2 konstruieren; wir nennen diese mal $\hat{\boldsymbol{q}}(t)$. Wir können dann mit $\hat{\boldsymbol{q}}(t)$ jedem Zeitpunkt t_1 einen Satz von Werten $\hat{\boldsymbol{q}}(t_0)$ zuordnen. Diese Werte sind aber wegen der Eindeutigkeit der Lösung, d.h. $\boldsymbol{q}(t) \equiv \hat{\boldsymbol{q}}(t)$, für alle beliebigen Zeitpunkte t_1 gleich. Die so konstruierten Werte $\hat{\boldsymbol{q}}(t_0) = \boldsymbol{q}_0$ sind also $2N_k$ Erhaltungsgrößen.

Weil die $\boldsymbol{q}_0$ erhalten sind, kann jede beliebige andere Erhaltungsgröße $I_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ des Systems als Funktion der Anfangsbedingungen $\boldsymbol{q}_0$ ausgedrückt werden. Für jede beliebige Erhaltungsgröße findet man nämlich durch direktes Einsetzen,

$$I_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = I_i(\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}_0, t), \dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}_0, t), t) =: \tilde{I}_i(\boldsymbol{q}_0, t) \stackrel{(*)}{=} \tilde{I}_i(\boldsymbol{q}_0) \; , \tag{3}$$

eine Funktion, die nur von $\boldsymbol{q}_0$ abhängt. Beachte $(*)$, dass wegen $\dot{\boldsymbol{q}}_0 = 0$ und (Kettenregel)

$$\frac{\mathrm{d}I_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\tilde{I}_i(\boldsymbol{q}_0, t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{N_k} \frac{\partial \tilde{I}_i(\boldsymbol{q}_0, t)}{\partial q_{0,j}} \dot{q}_{0,j} + \frac{\partial \tilde{I}_i(\boldsymbol{q}_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{I}_i(\boldsymbol{q}_0, t)}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

$\tilde{I}_i(\boldsymbol{q}_0, t)$ nicht explizit von der Zeit t abhängen kann (rechts). Es kann folglich keine Erhaltungsgröße geben, die von $\boldsymbol{q}_0$ unabhängig ist. Deshalb gibt es *maximal* $2N_k$ unabhängige Erhaltungsgrößen.

Gleichzeitig ist $2N_k$ auch die Mindestanzahl von Erhaltungsgrößen, weil die $\boldsymbol{q}_0$ ja alle schon erhalten sind. Es gibt also *genau* $2N_k$ Erhaltungsgrößen – zumindest, wenn $\boldsymbol{q}$ und $\dot{\boldsymbol{q}}$ von $t_0 \neq t$ gewählt sein dürfen.

Nun stellt sich die Frage: Wenn alle denkbaren Erhaltungsgrößen I_i Funktionen von $\boldsymbol{q}_0$ sind, warum sollen wir dann noch nach anderen Formen der Erhaltungsgrößen jenseits $\boldsymbol{q}_0$ suchen? Leider helfen die $\boldsymbol{q}_0$ nicht bei der Lösung der Bewegungsgleichungen. Um nämlich aus $\boldsymbol{q}_0$ die Positionen $\boldsymbol{q}(t)$ zu einem Zeitpunkt $t \neq t_0$ zu erhalten, muss man immer noch die ELG2 lösen! *Diese* Erhaltungsgrößen etablieren keinen Zusammenhang zwischen den Orten und den Geschwindigkeiten zu Zeitpunkten $t \neq t_0$; sie machen nur eine Aussage für $t = t_0$.

Ob sich Erhaltungsgrößen I_i finden lassen, die wie oben definiert, ausschließlich Funktionen der Zustandsvariablen $\boldsymbol{q}(t)$ und $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ zu jedem Zeitpunkt t sind, ist eine völlig andere Frage! Von diesen gibt es im Allgemeinen weniger als $2N_k$. Wieviele es gibt, hängt von der Art des Problems ab. Je mehr wir finden, desto mehr lassen sich erlaubte Lösungen einschränken und das Problem dadurch vereinfachen, weil wir formal mit jedem I_i eine Zustandsvariable durch alle anderen ersetzen können. Wir benötigen deshalb Strategien, um Erhaltungsgrößen I_i zu finden, die immer Funktionen von $\boldsymbol{q}$ und $\dot{\boldsymbol{q}}$ zum betrachteten Zeitpunkt t sind (wie z.B. die Energie E).

Es zeigt sich, dass Symmetrien der Lagrange-Funktion hier eine wichtige Rolle spielen. Unter einer Symmetrie von $\mathcal{L}$ versteht man, dass wir die Koordinaten $\boldsymbol{q}$ in einer bestimmten Art transformieren können, ohne die funktionale Form der Lagrange-Funktion zu verändern.

1.2 Zyklische Variablen

Die einfachste Symmetrie ist dann gegeben, wenn die Lagrange-Funktion für einen gegebenen Satz von Koordinaten q_i nicht direkt von q_i abhängt, d.h. $\partial\mathcal{L}/\partial q_i = 0$; q_i kommt durch geeignete Wahl der Koordinaten einfach nicht in $\mathcal{L}$ vor; $\mathcal{L}$ ist dann symmetrisch bezüglich einer Verschiebung $q_i \mapsto q_i + c$ mit der Konstanten c. Wir bezeichnen solche q_i als *zyklische Variablen*.

In diesem Fall erhalten wir aus den ELG2

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} =: \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = 0 \ . \tag{5}$$

Wir haben hier eine neue Größe eingeführt:

Definition. *Wir bezeichnen*

$$p_i := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} \tag{6}$$

als den zu q_i konjugierten Impuls oder auch kanonischen Impuls. Hiermit werden $\{q_i, p_i\}$ sogenannte konjugierte Größen.

Folglich sind zyklische Variablen mit einem erhaltenen konjugierten Impuls verbunden, weil dann $\dot{p}_i = 0$ oder $p_i = \text{konst.}$

Als Beispiel betrachten wir das Zweikörperproblem. Die Lagrange-Funktion des äquivalenten Einkörperproblems ist in der Bahnebene mit Polarkoordinaten

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2}\dot{d}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\theta}^2 d^2 - U(d) \ . \tag{7}$$

In $\mathcal{L}$ taucht θ wegen der Zentralkraft nicht explizit auf, wodurch θ eine zyklische Variable des Zentralkraftproblems zweier Körper wird. Der konjugierte Impuls zu θ lautet $p_\theta = \mu d^2\dot{\theta}$ und ist folglich eine Erhaltungsgröße. Wir erkennen hier in $p_\theta = L$ den Betrag des Drehimpulses $L = |\boldsymbol{L}|$ wieder. Hierdurch bietet es sich direkt an, schon in der Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ auch das $\dot{\theta}$ gänzlich zu entfernen,

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2}\dot{d}^2 + \frac{p_\theta^2}{2\mu d^2} - U(d) \ , \tag{8}$$

was uns erst einmal auf ein eindimensionales Problem in d führt. Haben wir das gelöst, benutzen wir die Konstanz von p_θ, um $\theta(t)$ durch Integration zu lösen.

Wir sehen also, eine Strategie ist es, alle zyklischen Variablen des Problems und deren erhaltene konjugierten Impulse zu identifizieren und dann in $\mathcal{L}$ entsprechend durch Integrationskonstanten zu ersetzen. Problematisch ist hier allerdings, dass die Anzahl der zyklischen Variablen offensichtlich von der Wahl der Koordinaten q_i abhängt. Hier bestimmen also Glück und Erfahrung, wie weit man mit dieser Strategie kommt.

1.3 Symmetrien der Lagrange-Funktion

Zyklische Variablen sind also mit einer Verschiebungssymmetrie der Lagrange-Funktion verknüpft: Die Koordinatentransformation $q_i \mapsto q_i + c$ der zyklischen Variablen mit der Konstanten c ändert nicht die Form von $\mathcal{L}$. Wir vermuten jedoch, dass es noch allgemeinere Koordinatentransformationen geben könnte, bezüglich der $\mathcal{L}$ forminvariant sein könnte, und die evtl. mit Erhaltungsgrößen verknüpft sind. Allgemeiner suchen wir Transformationen, die die ELG2 Bewegungsgleichungen forminvariant lassen, die aus der Lagrange-Funktion abgeleitet werden. Dies ist der Leitgedanke im berühmten *Noether-Theorem* von Amalie Emmy Noether (*1882-†1935), das wir hier in einer vereinfachten Form besprechen wollen. Das Noether-Theorem ist einer der Grundbausteine in der Formulierung der modernen theoretischen Physik.

Als allgemeine Koordinatentransformation stellen uns vor, dass wir einen gegeben Satz von Koordinaten $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_{N_k})$ stetig durch die Abbildung

$$q_i \mapsto q_i'(\boldsymbol{q}, t, \alpha) \ \ \forall i \tag{9}$$

in einen neuen Satz Koordinaten $\boldsymbol{q}' = (q_1', \ldots, q_{N_k}')$ transformieren. Diese Transformation hängt stetig von einem Parameter α ab. Dieser Parameter ist so gewählt, dass wir für $\alpha = 0$ die Identitätsabbildung erhalten, also $q_i'(\boldsymbol{q}, t, \alpha = 0) = q_i$; $\alpha = 0$ verändert die Koordinaten nicht. Außerdem soll $q_i' = q_i'(\boldsymbol{q}, t, \alpha)$ invertierbar bezüglich $\boldsymbol{q}$ sein; wir können die Transformation eindeutig nach $q_i = q_i(\boldsymbol{q}', t, \alpha)$ umformen.

Wie stellen wir nun fest, ob die Differentialgleichungen der neuen Koordinaten q_i' mit denen der q_i formal identisch sind? Um diese Frage zu beantworten, brauchen wir $\mathcal{L}'(\boldsymbol{q}', \dot{\boldsymbol{q}}', t)$, die Lagrange-Funktion der neuen Koordinaten $\boldsymbol{q}'$. Hierzu invertieren wir die Koordinatentransformation, so dass wir nun q_i als Funktion der neuen Koordinaten q_i' ausdrücken können:

$$q_i = q_i(\boldsymbol{q}', t, \alpha) \ \ \forall i \, . \tag{10}$$

Hierdurch definieren wir eine Punkttransformation, die uns von q_i nach q_i' bringt. Die Lagrange-Funktion der neuen Variablen folgt dann, wie schon besprochen, aus der alten durch Substitution

$$\mathcal{L}'(\boldsymbol{q}', \dot{\boldsymbol{q}}', t, \alpha) = \mathcal{L}\Big(\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}', t, \alpha), \dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}', \dot{\boldsymbol{q}}', t, \alpha), t\Big) \ \stackrel{?}{=} \mathcal{L}(\boldsymbol{q}', \dot{\boldsymbol{q}}', t) \, . \tag{11}$$

Die rechte Seite ist entscheidend für eine Symmetrie der Lagrange-Funktion: *Sollte* die neue Lagrange-Funktion $\mathcal{L}'$ einfach die alte $\mathcal{L}$ sein, nur mit den Variablen q_i eins-zu-eins durch q_i' und die Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ eins-zu-eins durch $\dot{q}_i'$ ersetzt, dann *müssen* wegen der Forminvarianz der Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen die Differentialgleichungen für q_i' exakt wie die von q_i aussehen. Die Form der Lösungen $q_i'(t)$ ist dann mit denen von $q_i(t)$ identisch. Das sind genau die Fälle, die wir suchen. Wir weisen hier nochmal darauf hin, dass wegen

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}', t, \alpha) = \dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}', \dot{\boldsymbol{q}}', t, \alpha) \tag{12}$$

die Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{q}}$ Funktionen der neuen Koordinaten $\boldsymbol{q}'$ *und* deren Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{q}}'$ sind.

Eine Forminvarianz ist nicht selbstverständlich, was wir anhand eines Beispiels demonstrieren wollen. Nehmen wir mit

$$\mathcal{L}(z, \dot{z}) = \frac{m}{2}\dot{z}^2 + \kappa z^2 \tag{13}$$

die eindimensionale Bewegung eines Oszillators der Auslenkung z. Wir versuchen nun die Transformation

$$z' = z + \alpha\ . \tag{14}$$

Hierdurch ist $\dot{z}' = \dot{z}$ und die neue Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}'(z', \dot{z}', \alpha) = \mathcal{L}(z' - \alpha, \dot{z}', \alpha) = \frac{m}{2}\dot{z}'^2 + \kappa z'^2 + 2\kappa\alpha z' + \kappa^2\alpha^2 \neq \mathcal{L}(z', \dot{z}')\ . \tag{15}$$

Diese Lagrange-Funktion ist also *nicht* invariant bezüglich der Translation im obigen Sinne. Verschieben wir den Massenpunkt weiter nach außen, kriegen wir natürlich eine Trajektorie mit größerer Amplitude! (Das Problem ist hier, dass die rückstellende Kraft eine äußere Kraft ist – das System ist nicht abgeschlossen.)

1.4 Erhaltungsgröße aufgrund einer Symmetrie der Lagrange-Funktion

Wieso folgt nun aus der Bedingung für Symmetrie in Gl. (11) rechts eine Erhaltungsgröße? Um dies zu zeigen, differenzieren wir die transformierte Lagrange-Funktion $\mathcal{L}'$ nach dem Parameter α,

$$\mathcal{L}'(\boldsymbol{q}', \dot{\boldsymbol{q}}', t, \alpha) \quad = \quad \mathcal{L}\Big(\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}', t, \alpha), \dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}', \dot{\boldsymbol{q}}', t, \alpha), t\Big) \tag{16}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}'(\boldsymbol{q}', \dot{\boldsymbol{q}}', t, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}\Big(\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}', t, \alpha), \dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}', \dot{\boldsymbol{q}}', t, \alpha), t\Big)}{\partial \alpha} \, . \tag{17}$$

Dies schreiben wir nun als (Kettenregel)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}'(\boldsymbol{q}', \dot{\boldsymbol{q}}', t, \alpha)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha}\mathcal{L}\Big(\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}', t, \alpha), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}', t, \alpha), t\Big) && (18)\\
&= \sum_{i=1}^{N_k}\left(\underline{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}\,\frac{\partial q_i(\boldsymbol{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\,\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\mathrm{d}q_i(\boldsymbol{q}', t, \alpha)}{\mathrm{d}t}\right) && (19)\\
&= \sum_{i=1}^{N_k}\left(\underline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}\,\frac{\partial q_i(\boldsymbol{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial q_i(\boldsymbol{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha}\right) && (20)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N_k}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i(\boldsymbol{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha}\right) \, . && (21)
\end{aligned}$$

In dieser Rechnung wurde an den unterstrichenen Stellen die Euler-Lagrange-Gleichung von q_i verwendet. Diese Relation ist soweit für alle Transformationen α gültig. Im Falle einer Symmetrie von $\mathcal{L}$ bezüglich der Koordinatentransformation $\boldsymbol{q}'(\boldsymbol{q}, t, \alpha)$ ist aber nun zusätzlich

$$\mathcal{L}'(\boldsymbol{q}', \dot{\boldsymbol{q}}', t, \alpha) = \mathcal{L}(\boldsymbol{q}', \dot{\boldsymbol{q}}', t) \, . \tag{22}$$

Sprich die neue Lagrange-Funktion $\mathcal{L}'$ nicht explizit von α abhängig, d.h. $\partial \mathcal{L}'/\partial \alpha = 0$ oder bei $\alpha = 0$:

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}'(\boldsymbol{q}', \dot{\boldsymbol{q}}', t, \alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N_k}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\left.\frac{\partial q_i(\boldsymbol{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\right) =: \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0 \, . \tag{23}$$

Die neue Größe

$$I := \sum_{i=1}^{N_k}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\left.\frac{\partial q_i(\boldsymbol{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\right) = \sum_{i=1}^{N_k}\left(p_i\left.\frac{\partial q_i(\boldsymbol{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\right) \tag{24}$$

ist demnach zeitlich konstant bei einer Symmetrie; I ist eine Erhaltungsgröße. Wir sagen: Die Symmetrie von $\mathcal{L}$ bezüglich der Transformation $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}', t, \alpha)$ erzeugt die Erhaltungsgröße I.

Beachte für diesen Ausdruck, dass $\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{q}$ bei $\alpha = 0$. Wir können also nach der Ableitung $\partial/\partial\alpha$ alle q_i' durch q_i ersetzen, wodurch I nur eine Funktion der Koordinaten q_i, deren Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ und der Zeit t sein kann. Aus diesem Grunde wurde der Spezialfall $\alpha = 0$ betrachtet.

1.5 Translationen

Als erste Anwendung betrachten wir ein (zwangfreies) System bei dem alle Kraftfelder nur von den relativen Abständen $\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$ der Teilchen bestimmt werden. Die Koordinaten seien hier einfache kartesische Koordinaten. Wir müssen hierfür die Lagrange-Funktion nicht hinschreiben, um zu wissen, dass ein Translation

$$\boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_i - \alpha\boldsymbol{e} \iff \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i' + \alpha\boldsymbol{e} \tag{25}$$

in eine beliebige Richtung $\boldsymbol{e}$ das Potenzial $U(\boldsymbol{z})$ in $\mathcal{L}$ nicht verändert.

Der Vektor $\boldsymbol{r}_i'$ entspricht dem Ort des $i$ten Teilchens aus der Perspektive eines Beobachters mit einem um $\alpha\boldsymbol{e}$ verschobenen Ursprung. Alternativ können wir dies aber auch als eine *aktive* Translation betrachten: Wir verschieben alle Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_i$ der Teilchen um den konstanten Vektor $-\alpha\boldsymbol{e}$.

Da sich hier bei der zeitlich konstanten Translation aber relativen Abstände und die Geschwindigkeiten nicht ändern, $\dot{\boldsymbol{z}}' = \dot{\boldsymbol{z}}$, erhalten wir sofort

$$\mathcal{L}'(\boldsymbol{z}', \dot{\boldsymbol{z}}', t, \alpha) = \mathcal{L}(\boldsymbol{z}', \dot{\boldsymbol{z}}', t)\ ; \tag{26}$$

die Bewegungsgleichungen für $\boldsymbol{r}_i'$ sind die gleichen wie die für $\boldsymbol{r}_i$. Also ist

$$I_{\text{trans}} = \sum_{i=1}^{N} \langle \boldsymbol{p}_i, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{r}_i', t, \alpha)}{\partial\alpha}\rangle\Big|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^{N} \langle \boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{e}\rangle = \langle \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{e}\rangle = \text{konst.} \tag{27}$$

Wir haben hier die Teilsummen $p_i \frac{\partial q_i}{\partial\alpha}$ aller Bewegungsrichtungen desselben Teilchens i zum Skalarprodukt $\langle \boldsymbol{p}_i, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial\alpha}\rangle$ zusammengefasst (Kartesische Koordinaten). Mit $\boldsymbol{p}_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}_i\, \boldsymbol{e}_x + \partial\mathcal{L}/\partial\dot{y}_i \boldsymbol{e}_y + \partial\mathcal{L}/\partial\dot{z}_i \boldsymbol{e}_z$ bezeichnen wir den konjugierten Impuls zu $\boldsymbol{r}_i = x_i\boldsymbol{e}_x + y_i\boldsymbol{e}_y + z_i\boldsymbol{e}_z$. Falls wir keine geschwindigkeitsabhängigen Potenziale U haben, ist dies der "normale" Impuls $\boldsymbol{p}_i = m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i$. Da wir die Richtung $\boldsymbol{e}$ beliebig wählen dürfen, muss also

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = \text{konst.} \tag{28}$$

sein. Aus der Translationsinvarianz folgt also sofort die Erhaltung des Gesamtimpulses $\boldsymbol{P}$.

Das ist eine bemerkenswerte Schlussfolgerung! Sie beruht auf der Annahme, dass die Bewegungsgleichungen sich formal bei einer Verschiebung des gesamten (abgeschlossenen) Systems von $\boldsymbol{r}_i \mapsto \boldsymbol{r}_i - \alpha\boldsymbol{e}$ im Raum nicht verändern. Man spricht hier auch von der Homogenität des Raumes.

1.6 Drehungen

Anstatt das System zu verschieben, wollen wir nun alle Orte $\boldsymbol{r}_i$ um eine beliebige Achse entlang $\boldsymbol{e}$ durch den Ursprung $\mathcal{O}$ um den beliebigen Winkel α rotierten, d.h.

$$\boldsymbol{r}'_i = \mathrm{D}(\alpha;\boldsymbol{e})\boldsymbol{r}_i \iff \boldsymbol{r}_i = \mathrm{D}(-\alpha;\boldsymbol{e})\boldsymbol{r}'_i \tag{29}$$

Hier sei $\mathrm{D}(\alpha;\boldsymbol{e})$ eine Drehung um den Winkel α um die Ursprungsachse entlang $\boldsymbol{e}$.

Hängt das Potenzial nur von den Beträgen $|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|$ der relativen Abstände ab, dann wird dieses durch eine *einmalige* Drehung, wie der oben beschriebenen, nicht verändert, d.h. $|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| = |\boldsymbol{r}'_i - \boldsymbol{r}'_j|$. Das Gleiche gilt für die Beträge $|\dot{\boldsymbol{r}}_i| = |\dot{\boldsymbol{r}}'_i|$ der Geschwindigkeiten, die im kinetischen Anteil der Lagrange-Funktion stehen. Wir ignorieren hier der Einfachheit halber wieder geschwindigkeitsabhängige Potenziale. Es gilt also wiederum exakt

$$\mathcal{L}'(\boldsymbol{z}',\dot{\boldsymbol{z}}',t,\alpha) = \mathcal{L}(\boldsymbol{z}',\dot{\boldsymbol{z}}',t)\ , \tag{30}$$

so dass wegen (Hinweis: $\mathrm{D}(\alpha;\boldsymbol{e})\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} + \alpha\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{r} + \mathcal{O}(\alpha^2)$)

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{r}'_i,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left.\frac{\partial \mathrm{D}(-\alpha;\boldsymbol{e})}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\boldsymbol{r}'_i = -\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{r}'_i \tag{31}$$

nun die Größe (Hinweis: $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\rangle = \langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\rangle$)

$$I_{\mathrm{rot}} = -\sum_{i=1}^{N}\langle\boldsymbol{p}_i,\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{r}_i\rangle = -\sum_{i=1}^{N}\langle\boldsymbol{e},\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i\rangle = -\langle\boldsymbol{e},\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i\rangle \tag{32}$$

für *beliebige* Drehachsen $\boldsymbol{e}$ erhalten ist. Dies bedeutet aber, wie haben den Gesamtdrehimpuls

$$\boldsymbol{L} := \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i \tag{33}$$

als Erhaltungsgröße nun auf eine Invarianz der Bewegungsgleichungen bezüglich einer Rotationen des Gesamtsystems zurückgeführt. Die Rotationsinvarianz von $\mathcal{L}$ erzeugt einen erhaltenen Gesamtdrehimpuls. Man bezeichnet diese Eigenschaft auch als Isotropie des Raumes.

1.7 Zeitverschiebungen

Können wir die Energieerhaltung bei skleronom-holonomen Zwangsbedingungen auch aus einer Symmetrie ableiten? (Rheonome Zwangsbedingungen können Energie ins System pumpen oder dem System entziehen; E ist deshalb dort i.A. nicht erhalten.)

Ja, unter Umständen. Man kann unter Umständen eine Energieerhaltung aus einer Zeitverschiebung

$$t' = t + \alpha \tag{34}$$

ableiten, wenn diese die Lagrange-Funktion unverändert läßt (Zeitsymmetrie). Wir brauchen also eine Zeit-Invarianz der Lagrange-Funktion,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t + \alpha) = \mathcal{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\ . \tag{35}$$

Das ist aber trivial, wenn $\mathcal{L}$ nicht explizit von der Zeit abhängt, d.h.

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)}{\partial t} = 0\ . \tag{36}$$

Diese Zeitverschiebung kann jedoch nicht mit dem Formalismus gehandhabt werden, den wir oben besprochen haben, weil die Zeit t keine generalisierte Koordinate darstellt. (Der Formalismus kann aber entsprechend erweitert werden.)

Wir können dennoch eine Erhaltungsgröße ableiten, indem wir uns die totale Zeitableitung von $\mathcal{L}$ entlang der Kurve $(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t))$ ansehen (Kettenregel):

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N_k}\left(\underline{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\dot{q}_i}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N_k}\left(\underline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N_k}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\ ; \tag{37}$$

die unterstrichenen Terme benutzen die Euler-Lagrange-Gleichung von q_i. Es folgt also allgemein durch Umformung, dass

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{L} - \sum_{i=1}^{N_k}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) =: -\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t}\ , \tag{38}$$

oder dass die

Hamiltonfunktion.

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N_k}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N_k} p_i\dot{q}_i - \mathcal{L} \tag{39}$$

genau dann erhalten ist, $\mathrm{d}\mathcal{H}/\mathrm{d}t = 0$, wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, $\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$. Die Hamilton-Funktion wird später noch ausführlicher diskutiert, weil sich mit ihr eine alternative Beschreibung der Bewegungsgleichungen konstruieren läßt.

Weiterhin ist die Funktion $\mathcal{H}$ unter bestimmten Bedingungen identisch mit der Gesamtenergie $E = T + U$, wodurch wir die Energieerhaltung unter diesen Bedingungen als Konsequenz aus der Zeitinvarianz von $\mathcal{L}$ gezeigt hätten. Eine Bedingung hierfür ist, dass wir Ruhekoordinaten als Darstellung wählen bzw. ein Ruhesystem als Referenzsystem wählen.

Ruhesystem. *Unter einem Ruhesystem versteht man eine Darstellung mit generalisierten Koordinaten $\boldsymbol{q}$, die nicht explizit von der Zeit abhängt, d.h. nur $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{q})$ anstatt der allgemeineren Darstellung $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{q}, t)$.*

Zusätzlich brauchen wir konservative Kräfte, für die automatisch Folgendes gilt ($\partial U/\partial\dot{q}_i = 0$):

$$p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} \ . \tag{40}$$

Man findet hiermit in einem Ruhesystem (siehe Anmerkung für den letzten Schritt):

$$\sum_{i=1}^{N_k} p_i\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{N_k} \frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T \ . \tag{41}$$

In diesem Fall erhalten wir den gesuchten Zusammenhang

$$\mathcal{H} = 2T - \mathcal{L} = 2T - T + U = T + U = E \ . \tag{42}$$

Nochmal: Die Hamilton-Funktion ist bei einer Zeitverschiebungs-Invarianz der Lagrange-Funktion *immer* eine Erhaltungsgröße für skleronom-holonome Systeme; vorausgesetzt, dass sich Kräfte aus einem (evtl. auch geschwindigkeitsabhängigen) Potenzial ableiten lassen. Sie ist aber nur dann identisch mit der Gesamtenergie E des Systems, wenn wir zusätzlich

1. nur konservative Kräfte $\boldsymbol{F}_z = -\nabla U(\boldsymbol{z})$ betrachten, und

2. Koordinaten eines Ruhesystems zur Darstellung wählen.

Anmerkung Die Bedingung (2) ist notwendig, damit die kinetische Energie $T(\boldsymbol{q},\lambda\dot{\boldsymbol{q}},t)=\lambda^2 T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ erfüllt, da T dann nur Summanden enthält, die ausschließlich quadratisch in den Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ sind. Die kinetische Energie ist dann eine *homogene Funktion* bezüglich der Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{q}}$. Das sieht man durch die folgende Rechnung (Kettenregel; beachte: $\boldsymbol{r}_i$ ist hier nicht explizit t-abhängig):

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}|\dot{\boldsymbol{r}}_i|^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\langle\dot{\boldsymbol{r}}_i,\dot{\boldsymbol{r}}_i\rangle && (43)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\langle\sum_{j=1}^{N_k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q})}{\partial q_j}\dot{q}_j,\sum_{l=1}^{N_k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q})}{\partial q_l}\dot{q}_l\rangle && (44)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{N_k}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\langle\frac{\partial\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q})}{\partial q_j},\frac{\partial\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q})}{\partial q_l}\rangle\right)\dot{q}_j\dot{q}_l && (45)\\
&=: \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{N_k}g_{jl}(\boldsymbol{q})\dot{q}_j\dot{q}_l\ . && (46)
\end{aligned}
$$

Alle Summanden sind quadratisch in den Geschwindigkeiten, d.h. $\propto\dot{q}_j\dot{q}_l$ mit den (metrischen) Koeffizienten $g_{jl}(\boldsymbol{q})$.

Aus dieser Homogenität der kinetischen Energie folgt dann durch Ableitung nach λ sowohl

$$
\frac{\partial T(\boldsymbol{q},\lambda\dot{\boldsymbol{q}},t)}{\partial\lambda}=2\lambda T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \tag{47}
$$

als auch (Kettenregel)

$$
\frac{\partial T(\boldsymbol{q},\lambda\dot{\boldsymbol{q}},t)}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{N_k}\frac{\partial(\lambda\dot{q}_i)}{\partial\lambda}\frac{\partial T(\boldsymbol{q},\lambda\dot{\boldsymbol{q}},t)}{\partial(\lambda\dot{q}_i)}=\sum_{i=1}^{N_k}\dot{q}_i\frac{\partial T(\boldsymbol{q},\lambda\dot{\boldsymbol{q}},t)}{\partial(\lambda\dot{q}_i)}\ . \tag{48}
$$

Aus dem Spezialfall $\lambda=1$ ergibt sich hieraus

$$
2T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=\sum_{i=1}^{N_k}\dot{q}_i\frac{\partial T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)}{\partial\dot{q}_i}\ , \tag{49}
$$

was oben verwendet wurde.

Aus der allgemeinen Form der kinetischen Energie von Teilchen in Ruhekoordinaten (Gl. 46) können wir direkt die Bewegungsgleichung des $i$ten Teilchens ohne Krafteinwirkung ableiten (aus den ELG2 mit $U=0$):

$$
\ddot{q}_k+\sum_{i,j=1}^{N_k}\Gamma^k_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j=0\ , \tag{50}
$$

wobei $g^{kl}(\boldsymbol{q}) = [\mathrm{g}^{-1}(\boldsymbol{q})]_{kl}$ (Indices oben!) die Inverse der Matrix $\mathrm{g}(\boldsymbol{q})$ ist, deren Koeffizienten durch $[\mathrm{g}(\boldsymbol{q})]_{kl} = g_{kl}(\boldsymbol{q})$ gegeben sind. Die Koeffizienten

$$\Gamma^k_{ij} := \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N_k} g^{kl}(\boldsymbol{q})\left(\frac{\partial g_{jl}(\boldsymbol{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial g_{il}(\boldsymbol{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial g_{ij}(\boldsymbol{q})}{\partial q_j}\right) \tag{51}$$

nennt man Christoffel-Symbole; bei kartesischen Koordinaten ist einfach $\Gamma^k_{ij} = 0$. In der Differentialgeometrie und der mathematischen Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie spielt dieser Formalismus eine wichtige Rolle. Gl. (50) beschreibt die Bewegung entlang einer Geodäten. Sollte die Lagrange-Funktion noch ein Potenzial U enthalten, dann wird evtl. die rechte Seite von null verschieden sein, nämlich $\partial U/\partial q_k$.

1.8 Eichinvarianz der Lagrange-Funktion*

Um Koordinatentransformation zu finden, die die Bewegungsgleichungen forminvariant lassen, haben wir uns nur solche angesehen, die die Lagrange-Funktion forminvariant lassen. Letzteres ist eine hinreichende Bedingung für die Forminvarianz der Bewegungsgleichungen, aber keine notwendige Bedingung.

Dies kann mit dem folgenden Beispiel illustriert werden. Betrachten wir einen Stein der Masse m, der in z-Richtung frei im erdnahen Schwerefeld fallen kann. Die Lagrange-Funktion dieses Szenarios ist in einem geeigneten Koordinatensystem (siehe Abschnitt **??**)

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{z}^2 + mgz\ . \tag{52}$$

Die Bewegungsgleichung von z ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = m\ddot{z} - mg = 0\ . \tag{53}$$

Wir wenden nun eine Translation

$$z' = z + \alpha \tag{54}$$

auf die Lagrange-Funktion an:

$$\mathcal{L}'(z', \dot{z}', \alpha) = \mathcal{L}(z' - \alpha, \dot{z}') = \frac{m}{2}\dot{z}^2 + mgz' - mg\alpha \neq \mathcal{L}(z', \dot{z}')\ . \tag{55}$$

Der konstante Term $mg\alpha$ verletzt unser obiges Suchkriterium für Symmetrien von $\mathcal{L}$, weil $\mathcal{L}$ in diesem Fall seine funktionale Form ändert. Jedoch erhalten wir trotzdem eine Bewegungsgleichung für z', die mit der von z identisch ist,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{z}'}-\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial z'}=m\ddot{z}'-mg=0\;, \tag{56}$$

weil der Extraterm $mg\alpha$ in $\mathcal{L}'$ nicht von z' oder $\dot{z}'$ abhängt. Folglich deckt unsere Symmetriebedingung in Gl. (11) nicht alle möglichen Fälle ab. Hier gibt es noch Spielraum, um mehr Erhaltungsgrößen zu finden!

Eine Erweiterung der Symmetriebedingung erhält man dadurch, dass man sich für Transformationen mit folgender Eigenschaft interessiert:

$$\mathcal{L}'(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',t,\alpha)=\mathcal{L}(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',t)+\frac{\mathrm{d}F(\boldsymbol{q}',t,\alpha)}{\mathrm{d}t}\;. \tag{57}$$

Wir erlauben nun, dass sich das transformierte $\mathcal{L}'$ und $\mathcal{L}(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',t)$ um die totale Zeitableitung einer beliebenen Funktion $F(\boldsymbol{q}',t,\alpha)$, die nicht von den Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{q}}'$ abhängig ist, unterscheiden dürfen. In unserem obigen Beispiel ist dieses $F(z',t,\alpha)=mg\alpha t$.

Wir lassen diese Verallgemeinerung deshalb zu, weil ein Summand der Art $\mathrm{d}F(\boldsymbol{q},t)/\mathrm{d}t$ die ELG2 nicht ändern kann (der Parameter α ist hier unerheblich). Man kann *immer* eine solche Funktion einer beliebigen Lagrange-Funktion anfügen. Wir nennen diese Freiheit die *Eichinvarianz* der Lagrange-Funktion.

Wieso das so ist, kann man u.a. durch direktes Nachrechnen finden. Wegen der Kettenregel findet man (Beachte: $F=F(\boldsymbol{q},t)$ hat per. def. *keine* $\dot{q}_i$-Abhängigkeit):

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{N_k}\frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial F}{\partial t}=\dot{F}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\;; \tag{58}$$

$$\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\;; \tag{59}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{N_k}\frac{\partial^2 F}{\partial q_i\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial^2 F}{\partial q_i\partial t}\;; \tag{60}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{N_k}\frac{\partial^2 F}{\partial q_i\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial^2 F}{\partial q_i\partial t}\;. \tag{61}$$

Da die Ableitungen der letzten beiden Zeilen das gleiche Ergebnis liefern, kann der Summand $\mathrm{d}F(\boldsymbol{q},t)/\mathrm{d}t$

in $\mathcal{L}$ aber keinen Beitrag zur Bewegungsgleichung von q_i produzieren, da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=0\;. \tag{62}$$

Die ELG2 für q_i aus $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}+\mathrm{d}F/\mathrm{d}t$ sind deshalb exakt identisch. Dies bestätigt die Eichinvarianz der Lagrange-Funktion. Voila!

Welche Erhaltungsgröße folgt nun aus der Forminvarianz der Lagrange-Funktion unter Berücksichtigung der Eichinvarianz? Die neue Symmetriebedingung in Gl. (57) schreiben als

$$\left.\frac{\partial\mathcal{L}'(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',t,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N_k}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\left.\frac{\partial q_i(\boldsymbol{q}',t,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial F(\boldsymbol{q}',t,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\;. \tag{63}$$

Wir erlauben also nun, dass sich $\mathcal{L}'(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',t,\alpha)$ und $\mathcal{L}(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',t)$ um einen Summanden unterscheiden dürfen. Bringen wir alle Terme auf eine Seite, dann erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}:=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N_k}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\left.\frac{\partial q_i(\boldsymbol{q}',t,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}-\left.\frac{\partial F(\boldsymbol{q}',t,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\right)\;, \tag{64}$$

wobei

$$J:=\sum_{i=1}^{N_k}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\left.\frac{\partial q_i(\boldsymbol{q}',t,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}-\left.\frac{\partial F(\boldsymbol{q}',t,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} \tag{65}$$

unsere neue Erhaltungsgröße ist. Wenn wir die Eichinvarianz ignorieren, $F=0$, dann erhalten wir den speziellen Fall, der eingangs diskutiert wurde.

Kehren wir zurück zum Beispiel des fallenden Steins, dann finden wir

$$F(z',t,\alpha)=mgt\alpha\;\;;\quad\left.\frac{\partial F(z',t,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=mgt \tag{66}$$

und deswegen die Erhaltungsgröße

$$J=m\dot{z}-mgt=\text{konst.} \tag{67}$$

Dies ist das Zeitintegral der Bewegungsgleichung Gl. (53)!

Literatur

[1] R. Fitzpatrick. *An Introduction to Celestial Mechanics*. September 2012.

[2] J. Honerkamp and H. Römer. *Klassische Theoretische Physik: Eine Einführung*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2012.

[3] F. Kuypers. *Klassische Mechanik: mit über 300 Beispielen und Aufgaben mit Lösungen*. Lehrbuch Physik. John Wiley & Sons, Limited, 2008.

[4] H.R. Petry and B.C. Metsch. *Theoretische Mechanik*. Oldenbourg, 2005.

[5] Peter Schneider. *Einführung in die Extragalaktische Astronomie und Kosmologie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.