



Klassische Theoretische Physik: Mechanik

Patrick Simon

Argelander-Institut für Astronomie

Auf dem Hügel 71

psimon@astro.uni-bonn.de

21. November 2013

1 Beschleunigte Bezugssysteme

Die Forminvarianz der Euler-Lagrange-Gleichungen bezüglich einer Punkttransformation können wir benutzen, um die Bewegungsgleichungen eines anderen Bezugssystems mit Koordinaten $q'(q, t)$ aufzustellen. Insbesondere muss dieses Bezugssystem nicht notwendigerweise ein Inertialsystem sein. Als Beispiel konzentrieren wir uns hier auf rotierende Beobachter.

1.1 Rotierende Beobachter

Wir betrachten hierfür aus der Perspektive eines inertialen Beobachter B1 einen Körper unter dem Einfluß des konservativen Kraftfelds $F(\mathbf{r})$. Es sollen der Einfachheit halber keine Zwangsbedingungen für diesen Körper gelten. Die Lagrange-Funktion des Beobachters B1 ist

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 - U(\mathbf{r}) . \quad (1)$$

Zur Parametrisierung von $\mathbf{r}(t)$ benutzt B1 die zeitlich konstanten Basisvektoren \mathbf{e}_i mit den Koordinaten x_i , d.h. $\mathbf{r}(t) = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$.

Ein zweiter Beobachter B2 verwendet den gleichen Ursprung $\mathcal{O} \in E^3$ wie B1, befindet sich aber in Rotation: B2 benutzt eine rotierende, *zeitabhängige Basis* $\mathbf{e}'_i(t)$ und die Koordinaten x'_i , um den Ort $\mathbf{r}(t) = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 + x'_3 \mathbf{e}'_3$ des Körpers zu parametrisieren. Hierdurch ist zwar der Ortsvektor $\mathbf{r}(t) \in V^3$ für B1 und B2 identisch, aber i.A. nicht deren Koordinaten x_i and x'_i .

Durch die Rotation seiner Basis wird B2 eine andere Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}'(t)$ beobachten als der Beobachter B1. Beobachter B1 findet

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \mathbf{e}_i . \quad (2)$$

Der Beobachter B2 würde dem Körper die Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{r}}'(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i \mathbf{e}'_i(t) \quad (3)$$

zuordnen, basierend auf den Zeitableitungen \dot{x}'_i der Koordinaten und der Basis \mathbf{e}'_i zum Zeitpunkt t . Die Geschwindigkeitsvektoren $\dot{\mathbf{r}}(t)$ und $\dot{\mathbf{r}}'(t)$ sind aber unterschiedlich, was man durch die folgende Rechnung

sehen kann ($\dot{e}'_i = \boldsymbol{\omega} \times e'_i$, siehe Abschnitt ??):

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i e'_i(t) + \sum_{i=1}^3 x'_i \dot{e}'_i(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i e'_i(t) + \sum_{i=1}^3 x'_i \boldsymbol{\omega} \times e'_i(t) = \dot{\mathbf{r}}'(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'(t). \quad (4)$$

Die Rotation der Basis B2 sei hier beschrieben durch den Vektor $\boldsymbol{\omega}$ der Winkelgeschwindigkeit; $\boldsymbol{\omega}$ darf sich prinzipiell auch mit der Zeit ändern. Beide Beobachter kommen also zu dem Einverständnis, dass sich $\dot{\mathbf{r}}(t)$ und $\dot{\mathbf{r}}'(t)$ um $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'(t)$ unterscheiden.

Beachte, dass diese Darstellung koordinatenfrei ist: B2 misst tatsächlich eine andere Geschwindigkeit, nicht nur andere Geschwindigkeitskoordinaten des gleichen Vektors $\dot{\mathbf{r}}$. Das ist deshalb, weil B2 bei einer Geschwindigkeitsmessung auch die Bewegung seiner Basisvektoren sieht.

Wie sehen nun die Bewegungsgleichungen für B2 aus? Der Übergang von x_i nach $x'_i(x_1, x_2, x_3, t)$ definiert eine Punkttransformation. Wegen der Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen erhalten wir die Bewegungsgleichungen der x'_i dadurch, dass wir die x_i in \mathcal{L} durch $x_i(x'_1, x'_2, x'_3, t)$ ersetzen.

Dies klingt komplizierter als es in Wirklichkeit ist. Wir müssen hierfür nämlich nur die Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' ; \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' \quad (5)$$

in der Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, Gl. (1), substituieren

$$\mathcal{L}' = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'|^2 - U(\mathbf{r}') \quad (6)$$

$$= \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{r}}'|^2 + m \langle \dot{\mathbf{r}}', \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \rangle + \frac{m}{2} \langle \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \rangle - U(\mathbf{r}') \quad (7)$$

$$= \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{r}}'|^2 + m \langle \dot{\mathbf{r}}', \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \rangle + \frac{m}{2} (|\boldsymbol{\omega}|^2 |\mathbf{r}'|^2 - |\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}' \rangle|^2) - U(\mathbf{r}'). \quad (8)$$

Hier haben wir die Relation $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|^2$ verwendet. Durch diese Art der Herleitung mussten wir die Punkttransformation $x_i = x_i(x'_1, x'_2, x'_3, t)$ nicht explizit angeben, sie ist aber indirekt durch die Koordinatendarstellung von \mathbf{r}' und $\dot{\mathbf{r}}'$ in \mathcal{L}' enthalten.

Die Lagrange-Funktion \mathcal{L}' enthält zwei neue Terme, die wir unterstrichen haben. Diese Terme sind verantwortlich für additive Extraterme – sogenannte *Scheinkräfte* – in den Bewegungsgleichungen des Beobachters B2,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{x}'_i} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'_i} = 0 \quad \forall i. \quad (9)$$

Um die Scheinkräfte zu berechnen, schreiben wir vorübergehend die neuen Terme in \mathcal{L}' als Funktion der Koordinaten x'_i . Dies ist nicht anders möglich, weil die Bewegungsgleichungen die Koordinaten x'_i explizit brauchen. Wir erhalten:

$$\mathcal{L}'_1 := m\langle \dot{\mathbf{r}}', \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \rangle = m \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \dot{x}'_i \omega'_j x'_k, \quad (10)$$

$$\mathcal{L}'_2 := \frac{m}{2} (|\boldsymbol{\omega}|^2 |\mathbf{r}'|^2 - |\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}' \rangle|^2) = \frac{m}{2} \sum_{i,j=1}^3 \omega_i^2 x_j^2 - \frac{m}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \omega_i x'_i \right)^2. \quad (11)$$

(Erinnerung: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k$ in einer beliebigen orientierten Orthonormalbasis; ϵ_{ijk} ist der Levi-Cevita-Tensor.) Beachte, dass diese *skalaren* Ausdrücke die zeitabhängigen Basisvektoren $\mathbf{e}'_i(t)$ nicht explizit enthalten; nur deren Orthonormalität wurde verwendet.

Man erhält nun durch Anwendung von Gl. (9) auf \mathcal{L}'_1 (Hinweis: (*) benutzt $\epsilon_{ijl} = -\epsilon_{lji}$):

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_1}{\partial \dot{x}'_l} = m \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ljk} \omega'_j x'_k, \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'_1}{\partial \dot{x}'_l} = m \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ljk} (\dot{\omega}'_j x'_k + \omega'_j \dot{x}'_k) = m (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}')_l, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_1}{\partial x'_l} = m \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ijl} \dot{x}'_i \omega'_j \stackrel{(*)}{=} -m \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{lji} \omega'_j \dot{x}'_i = -m (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}')_l, \quad (14)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'_1}{\partial \dot{x}'_l} - \frac{\partial \mathcal{L}'_1}{\partial x'_l} = m (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}')_l + 2m (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}')_l. \quad (15)$$

Die entsprechenden Terme, die von \mathcal{L}'_2 erzeugt werden, sind (BACCAB-Regel im letzten Schritt):

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_2}{\partial \dot{x}'_l} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_2}{\partial x'_l} = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 2\omega_i^2 x'_l - \frac{m}{2} 2 \sum_{i,j=1}^3 \omega'_i x'_j \omega'_l \quad (17)$$

$$= m x'_l \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 - m \omega'_l \sum_{i,j=1}^3 \omega'_i x'_j \quad (18)$$

$$= m \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle x'_l - m \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}' \rangle \omega'_l \quad (19)$$

$$= m (\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle \mathbf{r}' - \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}' \rangle \boldsymbol{\omega})_l \quad (20)$$

$$= -m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')_l, \quad (21)$$

$$\implies \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'_2}{\partial \dot{x}'_l} - \frac{\partial \mathcal{L}'_2}{\partial x'_l} = m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')_l. \quad (22)$$

Fassen wir diese Ergebnisse mit den anderen Termen der Bewegungsgleichungen von zusammen, dann können wir für den Beobachter B2 konstatieren:

$$m\ddot{\mathbf{r}}' + \underline{m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'} + \nabla U(\mathbf{r}') = 0. \quad (23)$$

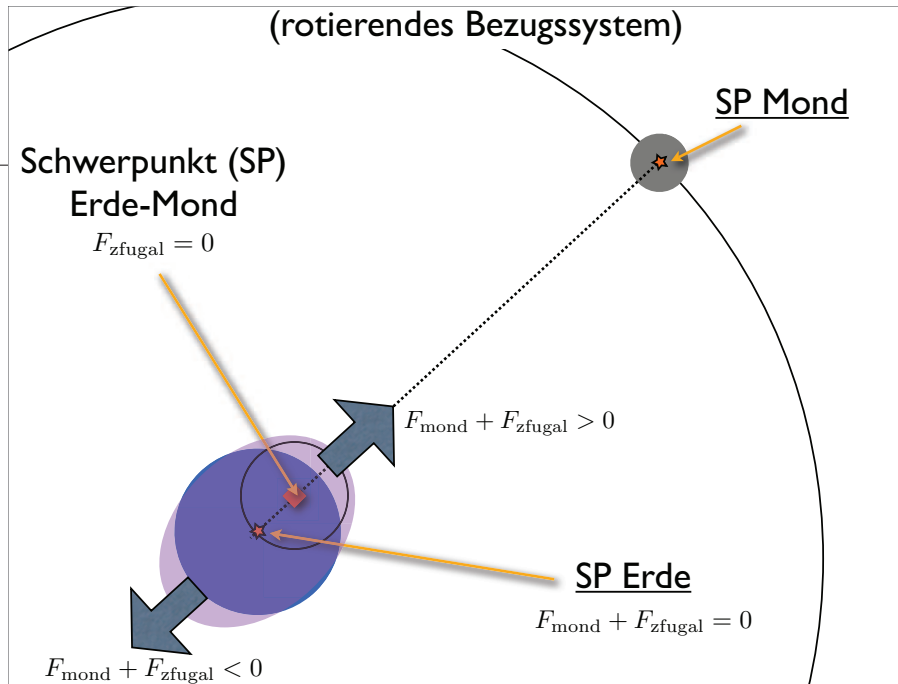
Der Bewegungsgleichung $m\ddot{\mathbf{r}} + \nabla U(\mathbf{r}) = 0$ des inertialen Beobachter B1 sind demnach neue Terme hinzugefügt worden (unterstrichen). Diese Scheinkräfte des rotierenden Beobachters B2 sind die Corioliskraft ($2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'$) – benannt nach Gaspard Gustave de Coriolis (*1792-†1843) –, die Zentrifugalkraft ($m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$) und eine weitere Kraft $m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'$, die nur bei einer beschleunigten Rotation $\dot{\boldsymbol{\omega}} \neq 0$ beobachtet wird.

Die Corioliskraft hat einen wichtigen Einfluß auf das Wettersystem der rotierenden Erde: Für den mitrotierenden Beobachter auf der Nordhalbkugel werden Luftmassen, die Tiefdruckgebieten entgegenströmen, durch die Corioliskraft gegen den Uhrzeigersinn abgelenkt, auf der Südhalbkugel hingegen in Uhrzeigersinn. Das Verhalten bei Hochdruckgebieten, von denen Luftmassen radial wegströmen, ist genau anders herum. Die Entstehung der Passatwinde in Äquatornähe oder der Verlauf des Golfstroms gehen auch auf die Corioliskraft zurück.

1.2 Erde-Mond-System

Generell wird die Beschreibung der Trajektorie in einem rotierenden System komplizierter, weil mehr Kräfte zu berücksichtigen sind. Es gibt jedoch Situationen, bei denen rotierende Bezugssysteme die Betrachtung einfacher werden lassen. Nehmen wir z.B. das Problem der Gezeiten der Meere im Erde-Mond-System. In grober Näherung umkreisen sowohl die Erde als auch der Mond den gemeinsamen Masse-schwerpunkt \mathbf{R} auf Kreisbahnen mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi/27.3d$ (Zweikörperproblem).

Setzen wir uns als Beobachter ruhend auf \mathbf{R} und rotieren unser Koordinatensystem exakt mit ω um die Achse durch \mathbf{R} in Richtung des Drehimpulsvektor \mathbf{L} von Erde-Mond, dann befinden sich Erde und Mond



in Ruhe, etwa bei einem konstanten Abstand von $\sim 3 \times 10^5$ km. Dass Erde und Mond trotz der Schwerkraft nicht aufeinander fallen, erklären wir uns in *diesem* Bezugssystem durch die Zentrifugalkraft, die genau die Schwerkraft in den Masseschwerpunkten von Mond und Erde kompensiert. Die mondzugewandte Seite der Erde, hingegen, ist etwas näher zum Mond. Weil dort die Mondschwerkraft größer ist, wird Wasser auf dieser Seite zum Mond gezogen. Auf der mondabgewandten Seite hingegen ist die Schwerkraft des Mondes kleiner wegen des ~ 12.000 km größeren Abstands (die Erde hat einen Radius von ~ 6000 km). Noch wichtiger: Dort ist die Zentrifugalkraft größer als die Schwerkraft des Mondes; das Gleichgewicht beider Kräfte ist ja im Erdmittelpunkt. Deshalb wird Wasser auf dieser Seite scheinbar vom Mond abgestoßen, wodurch ein mondabgewandter, zweiter Wassergezeitenberg entsteht.

Da sich die Erde noch um die eigene Achse dreht, durchläuft ein fester Beobachter auf der Erdoberfläche im Laufe eines Tages zwei Wasserberge und -täler (Flut und Ebbe). In einem Inertialsystem müsste das gleiche Phänomen durch die Massenträgheit der mitgeführten Erdozeane beschrieben werden.