universitätbonn

Rheinische
Friedrich-Wilhelms-
Universität Bonn

Klassische Theoretische Physik: Mechanik

Patrick Simon

Argelander-Institut für Astronomie

Auf dem Hügel 71

psimon@astro.uni-bonn.de

27. Januar 2014

1 Euler-Lagrange-Gleichungen

Wir sind mit unserer Beschreibung der klassischen Mechanik schon ziemlich weit gekommen. Mit dem bisher Erarbeiteten könnte man den Eindruck gewinnen, dass wir jedes klassische physikalische Problem zumindest konzeptionell durch Aufstellung der Bewegungsgleichungen nun lösen könnten.

1.1 Zwangsbedingungen

Es stellt sich aber heraus, dass wir noch gar nicht so genau wissen, wie wir sehr alltägliche Probleme in diesem Formalismus unterzubringen haben. Was ist etwa zu tun, wenn die Bewegung der Körper durch *Zwangsbedingungen* eingeschränkt wird? Der Massepunkt eines Pendels z.B. kann sich nicht frei bewegen, sondern muss für jede erlaubte Auslenkung immer einen festen Abstand l zum Aufhängepunkt haben. Diese Bedingung können wir schreiben als:

$$|\boldsymbol{r}|^2 = l^2 \; . \tag{1}$$

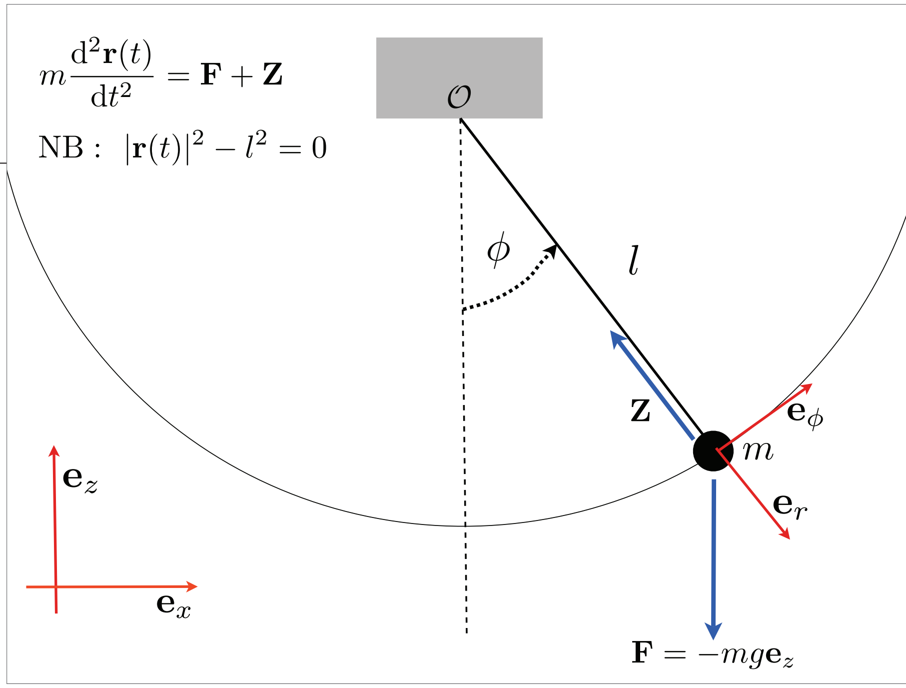
Es geht uns nun also um die Lösung der Bewegungsgleichungen mit Nebenbedingungen bzw. Zwangsbedingungen.

Wir schreiben allgemein Zwangsbedingungen dieser Art als ein System von $i = 1 \dots k$ Gleichungen mit

$$f_i(\boldsymbol{z}, t) = 0 \; ; \tag{2}$$

jede erlaubte Bewegung der Teilchenorte $\boldsymbol{z} \in Z$ muss zu jedem Zeitpunkt dieses System von Gleichungen erfüllen; f_i sei stetig differenzierbar. Wir nennen diese Zwangsbedingungen *holonom*. Wir unterteilen holonome Zwangsbedingungen nochmal in *holonom-skleronom*, wenn sie nicht explizit von der Zeit abhängen, oder *holonom-rheonom*, wenn sie stetig von der Zeit abhängen. Eine explizit zeitabhängige Zwangsbedingung könnte sein, dass sich die Länge l eines Pendels mit der Zeit verändert, d.h. $|\boldsymbol{r}|^2 - l(t)^2 = 0$. Oder wir betrachten Teilchen, die sich in einer Ebene bewegen müssen, die langsam rotiert.

Zwangsbedingungen, die sich nicht in der Form (2) schreiben lassen, nennen wir folglich *nichtholonom*. Ein Beispiel dieser Kategorie sind Billardkugeln, die sich frei auf dem Billardtisch bewegen dürfen,



aber an der Bande reflektiert werden. Unsere Bewegung auf der Erdoberfläche ist auch nichtholonom, weil wir nicht durch den Boden fallen können, aber uns oberhalb des Bodens frei bewegen können. Zwangsbedingungen, die Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{z}}$ enthalten, können holonom sein, wenn sie aus totalen Zeitableitung einer holonomen Zwangsbedingung entstehen. Leiten wir z.B. $|\boldsymbol{r}|^2 - l^2 = 0$ nach der Zeit ab, so wird

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{r}| = \frac{\langle \dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{r} \rangle}{|\boldsymbol{r}|} = 0 \iff \langle \dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{r} \rangle = 0 \tag{3}$$

eine Nebenbedingung, die von der Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}$ abhängt, aber trotzdem holonom ist. Wir konzentrieren uns hier hauptsächlich auf holonome Zwangsbedingungen.

Mathematisch definieren holonome Zwangsbedingungen eine Hyperebene oder Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$, die die Menge aller erlaubten Teilchenorte definiert. Hierdurch werden die $3N$ Freiheitsgrade des Systems auf $N_k := 3N - k$ eingeschränkt (wenn die Zwangsbedingungen unabhängig sind).

Eine "Einschränkung" kann nur bedeuten, dass zusätzliche Kräfte – *Zwangskräfte* – $\boldsymbol{Z}_i$ wirken, die dafür sorgen, dass die Teilchen so beschleunigt werden, dass sich diese ausschließlich innerhalb $\boldsymbol{z} \in \mathcal{M}$ bewegen. Beim vorangegangenen Beispiel des Pendels muss eine Zwangskraft in Richtung der Aufhängung wirken, damit die resultierende Kraft den Abstand des Massenpunktes zur Aufhängung nicht verändert kann. Deshalb lauten die eingeschränkten Bewegungsgleichungen i.A.

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{Z}_i = 0 \;\forall i \;, \tag{4}$$

zusammen mit den Nebenbedingungen; $f_i(\boldsymbol{z}, t) = 0$ im holonomen Fall. Wir können das als Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichungen verstehen.

Wie die Zwangskräfte genau aussehen, wird durch die Zwangsbedingungen bestimmt und von der Trajektorie selbst. Das Problem der eingeschränkten Bewegung scheint also sehr schnell sehr kompliziert werden zu können.

1.2 Zwangsprobleme 2. Art

Um das Problem anzugehen, versucht man einen neuen Satz von N_k unabhängigen *generalisierten Koordinaten* q_k

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_{N_k}, t) =: \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q}, t) \tag{5}$$

zu finden, der alle Zwangsbedingungen für eine *unabhängige Wahl* der Werte von q_k immer gleichzeitig erfüllt, d.h.

$$f_i(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{q}, t), t) = 0 \;\; \forall i, q_k \;. \tag{6}$$

Wir nennen Probleme, die so generalisiert werden können, *Probleme 2. Art*. Diese Probleme haben den Vorteil, wie wir gleich sehen werden, dass wir die Bewegungsgleichungen lösen können, ohne die Zwangskräfte jemals explizit kennen zu müssen.

Probleme 1. Art, bei denen wir keine generalisierten Koordinaten finden, die alle Zwangsbedingungen trivialerweise erfüllen, behandeln wir später. Hier muss man zumindest einen Teil der Zwangskräfte zusammen mit den Bewegungsgleichungen berechnen.

Für das Beispiel unseres Pendels könnte man, wenn wir nur die Schwingung in einer Ebene $\{\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_x\}$ betrachten, den Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ durch den Ausschlagwinkel $q_1 = \phi$ parametrisieren,

$$\boldsymbol{r}(\phi) = l\sin\phi\boldsymbol{e}_x - l\cos\phi\boldsymbol{e}_z =: l\boldsymbol{e}_r =: \begin{pmatrix} +l\sin\phi \\ -l\cos\phi \end{pmatrix} \;; \tag{7}$$

der Vektor $\boldsymbol{e}_z$ zeige nach oben. Dies erfüllt automatisch für alle Winkel ϕ die Zwangsbedingung $|\boldsymbol{r}|^2 - l^2 = l^2 - l^2 = 0$. Um nun die Bewegungsgleichung des einzigen Freiheitsgrads ϕ zu erhalten, setzen wir $\boldsymbol{r}(\phi)$ in die Bewegungsgleichung (**??**) ein,

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{r}(\phi) - \boldsymbol{F} - \boldsymbol{Z} & \qquad (8)\\
= m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(l\dot{\phi}\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}\right) - \boldsymbol{F} - \boldsymbol{Z} & \qquad (9)\\
= ml\ddot{\phi}\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix} - ml\dot{\phi}^2\begin{pmatrix}+\sin\phi\\ -\cos\phi\end{pmatrix} - \boldsymbol{F} - \boldsymbol{Z} & \qquad (10)\\
=: ml\ddot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi - ml\dot{\phi}^2\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{F} - \boldsymbol{Z} = 0\ . & \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Um hier weitere Fortschritte zu machen, multiplizieren wir diese *Vektorgleichung* in einem Fall mit $\langle \boldsymbol{e}_\phi, .\rangle$,

$$ml\ddot{\phi} - \langle \boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{F}\rangle - \langle \boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{Z}\rangle = ml\ddot{\phi} - \langle \boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{F}\rangle = 0\ , \qquad (12)$$

und in dem anderen mit $\langle \boldsymbol{e}_r, .\rangle$

$$ml\dot{\phi}^2 - \langle \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{F}\rangle - \langle \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{Z}\rangle = 0\ . \qquad (13)$$

Beachte, dass $\langle \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\phi\rangle = 0$ und $|\boldsymbol{e}_r|^2 = |\boldsymbol{e}_\phi|^2 = 1$. Wir zerlegen also hier die Kräfte in Komponenten entlang der Aufhängung $\boldsymbol{e}_r$ und senkrecht dazu, d.h. in Richtung $\boldsymbol{e}_\phi$. Die Zwangskraft hält ja nur den Abstand zur Aufhängung konstant, weshalb $\langle \boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{Z}\rangle = 0$ in der ersten Gleichung gilt.

Wir sehen nun, dass die erste Gleichung nicht von der Zwangskraft abhängt, aber trotzdem die Bewegung in ϕ beschreibt, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\langle \boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{F}\rangle}{ml} = \frac{mg}{ml}\sin\phi(t) = \frac{g}{l}\sin\phi(t)\ ; \qquad (14)$$

die Kraft wirke hier nach unten mit $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$. Wohingegen die zweite Gleichung vollständig die Zwangskraft beschreibt (zusammen mit $\langle \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{Z}\rangle = 0$),

$$\langle \boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{Z}\rangle = ml\dot{\phi}^2 - \langle \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{F}\rangle = ml\dot{\phi}^2(t) + mg\cos\phi(t)\ , \qquad (15)$$

die wir berechnen können, sobald wir die Bewegungsgleichung $\phi(t)$ gelöst haben. Dies könnte durchaus von Interesse sein, insbesondere im Maschinenbau, wenn man ein Pendel konstruieren möchte und wissen muss, welche Zwangskräfte die Aufhängung aushalten muss. Die Konstruktion ist es schließlich, die die Zwangsbedingungen aufrechterhalten muss! Wir erkennen im Übrigen in Gl. (15) die Zentripedalkraft wieder, $ml\dot{\phi}^2$, die wir brauchen, um ein Teilchen auf einer Kreisbahn zu halten. Die Zwangskraft muss aber auch die Kraftkomponente $\langle \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{F} \rangle$ entlang der Aufhängung kompensieren (maximal bei $\phi = 0$).

1.3 D'Alembertsches Prinzip

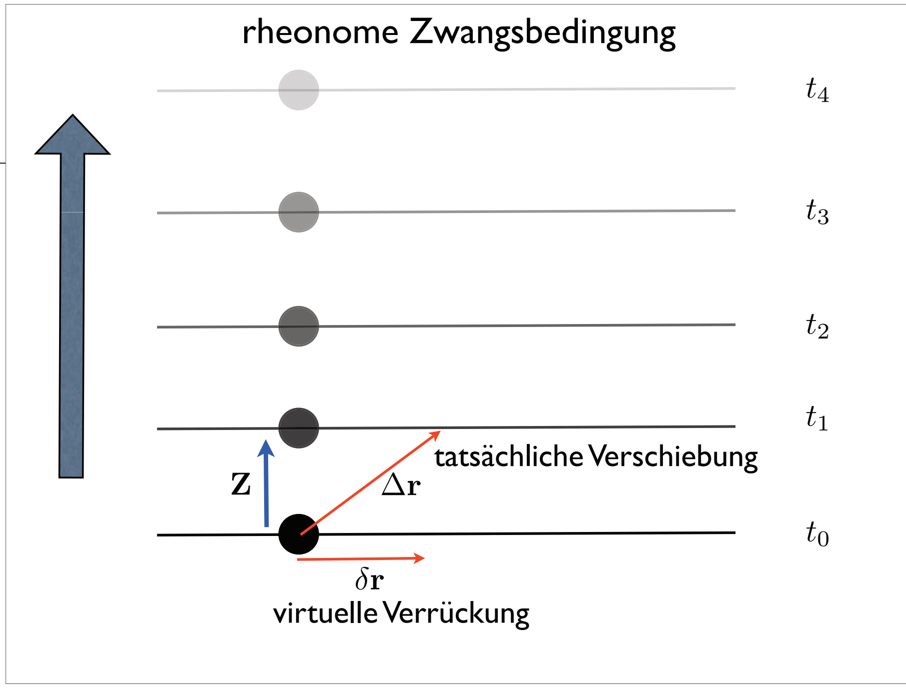
Um die vorherige Rechnung zu verallgemeinern, führt man ein weiteres Axiom der klassischen Mechanik ein, das die Natur der Zwangskräfte betrifft: das sogenannte *D'Alembertsche Prinzip*, benannt nach Jean-Paptiste le Ronde D'Alembert (*1717-†1783). Hierfür stellt man sich ein System mit N Teilchen und Positionen $\boldsymbol{r}_i$ vor. Es sei $\delta\boldsymbol{r}_i$ eine beliebige infinitisimale Veränderung der Positionen $\boldsymbol{r}_i$, die mit den Zwangsbedingungen *verträglich* ist. Zusätzlich – und das ist wichtig hier – sollen die Zwangsbedingungen zu einem Zeitpunkt *eingefroren* sein. Bei skeloronomen Zwangsbedingungen spielt dies keine Rolle, weil diese sowieso zeitunabhängig sind. Aber auch rheonome Nebenbedingungen sollen für die gedachten Verschiebungen $\delta\boldsymbol{r}_i$ zeitlich konstant sein.

Man nennt die Verschiebungen $\delta\boldsymbol{r}_i$ *virtuelle Verrückungen*, weil diese unter rheonomen Bedingungen praktisch nicht durchführbar sind. Zur Veranschaulichung siehe Beispiel der Perle auf einem horizontalen Draht: Der Draht bewegt sich immer weiter nach oben, so dass eine rein horizontale Bewegung der Perle niemals möglich ist. Halten wir die Zwangsbedingung aber zeitlich fest, dann kann sich die Perle beliebig nach links und rechts bewegen. Die Zwangskraft wirkt in diesem Beispiel vertikal und sorgt dafür, dass die Perle sich genau vorgegeben nach oben bewegt.

Definition. *Das D'Alembertsche Prinzip besagt nun, dass virtuelle Verschiebungen $\delta\boldsymbol{r}_i$ entgegen der Zwangskräfte $\boldsymbol{Z}_i$ <u>in der Summe</u> niemals Arbeit verrichten, d.h.*

$$\sum_{i=1}^{N} \langle \boldsymbol{Z}_i, \delta\boldsymbol{r}_i \rangle = 0 \; . \tag{16}$$

Dieses *Postulat* basiert auf der Beobachtung, dass die Anwesenheit von skleronomen Zwangsbedingungen die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems nicht verändert. Deswegen geht man auch bei



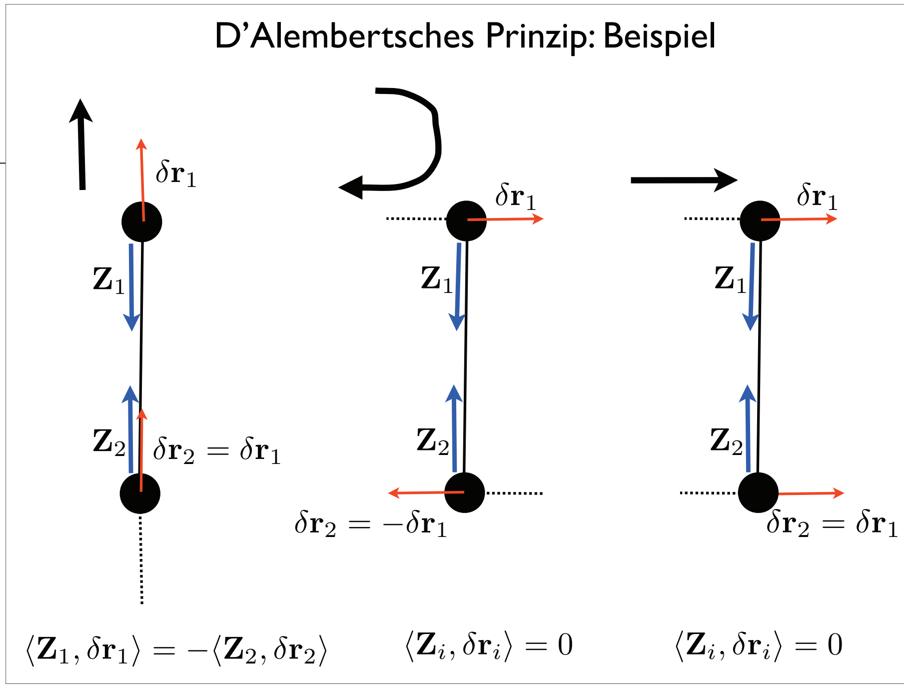
rheonomen Bedingungen davon aus, dass diese keine Arbeit in der Summe leisten, wenn wir die zeitliche Änderung der Zwangsbedingungen abschalten würden.

Vorsicht! Das D'Alembertsche Prinzip bedeutet aber

- *nicht*, dass einzelne Teilchen keine virtuelle Arbeit leisten, d.h. einzelne Summanden $\langle \boldsymbol{Z}_i, \delta\boldsymbol{r}_i \rangle$ können durchaus von null verschieden sein; siehe Beispiel mit zwei Perlen, die durch einen Draht auf einen festen Abstand gehalten werden (die Verrückungen können das Perlenpaar verschieben und drehen); wegen Actio=Reactio gilt in diesem Fall $\boldsymbol{Z}_1 = -\boldsymbol{Z}_2$;

- *nicht*, dass rheonome Zwangsbedingungen keine Arbeit an einem System leisten können. Beispiel: Eine Kugel, die sich aufgrund von Zwang entlang einer geführten Trajektorie $\hat{\boldsymbol{r}}(t)$ mit $|\dot{\hat{\boldsymbol{r}}}| \neq$ konst. bewegen muss. Offensichtlich ändert sich hier die kinetische Energie der Kugel! Die erlaubten virtuellen Verrückungen sind in diesem Fall aber alle ausnahmslos $\delta\boldsymbol{r} = 0$, da die Kugel keine Freiheitsgrade hat, $f(\boldsymbol{r}, t) = |\boldsymbol{r}(t) - \hat{\boldsymbol{r}}(t)| = 0$.

Im zweiten Fall wird die Arbeit am System durch den "Motor" geleistet, der die rheonomen Zwangsbe-



dingungen gewährleistet. Virtuelle Arbeiten verschwinden jedoch auch hier.

1.4 Euler-Lagrange Gleichungen 2. Art

Das D'Alembertsche Prinzip gibt uns nun die Möglichkeit, die Zwangskräfte aus den Bewegungsgleichungen zu beseitigen, wenn wir geeignete generalisierte, unabhängige Koordinaten q_i finden können.

Dank dieses Postulats können wir nämlich die Bewegungsgleichungen mit Zwangskräften als

$$\sum_{i=1}^{N}\langle\underbrace{m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{Z}_i}_{=0}, \delta\boldsymbol{r}_i\rangle = \sum_{i=1}^{N}\langle m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{F}_i, \delta\boldsymbol{r}_i\rangle + \sum_{i=1}^{N}\langle\boldsymbol{Z}_i, \delta\boldsymbol{r}_i\rangle = \sum_{i=1}^{N}\langle m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{F}_i, \delta\boldsymbol{r}_i\rangle = 0 \;\; \forall\delta\boldsymbol{r}_i \tag{17}$$

schreiben. Diese Summe verschwindet für *alle* erlaubten virtuellen Verrückungen. Dies scheint erst mal wenig Vorteile zu haben, da wir ein System von Differentialgleichungen in eine Summe von Skalaren verwandelt haben. Wir sollten hier zumindest anerkennen, dass auf der rechten Seite der Gleichung die Zwangskräfte nicht mehr auftreten.

Das Problem mit dieser Gleichung sind die virtuellen Verrückungen $\delta\boldsymbol{r}_i$, die aufgrund der Zwangsbedingungen nicht linear unabhängig sind. Deswegen suchen wir uns einen neuen Satz von generalisierten

Koordinaten q_i, mit $i = 1 \ldots N_k$ bei k Zwangsbedingungen, die unabhängig gewählt werden dürfen, ohne die Zwangsbedingungen jemals zu verletzen (Problem 2. Art). Dann drücken wir die virtuellen Bewegungen (Kettenregel)

$$\delta \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q}, t) = \sum_{j=1}^{N_k} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{18}$$

als Funktion virtueller Verrückungen der neuen Koordinaten δq_j aus. Setzen wir diese Beziehung nun in Gl. (17) ein, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{N} \langle m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{F}_i, \delta \boldsymbol{r}_i \rangle = \sum_{j=1}^{N_k} \left(\sum_{i=1}^{N} \langle m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{F}_i, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \rangle \right) \delta q_j = 0 \;\; \forall \delta q_j \; . \tag{19}$$

Dieser Schritt ist eine erhebliche Verbesserung: Die Gl. (19) muss für beliebige und *unabhängige* Kombinationen δq_j gültig sein. Das ist aber nur möglich, wenn die einzelnen Koeffizienten von δq_j (rechts) verschwinden, also wenn

$$\sum_{i=1}^{N} \langle m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{F}_i, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \rangle = \sum_{i=1}^{N} m_i \langle \ddot{\boldsymbol{r}}_i, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \rangle - \sum_{i=1}^{N} \langle \boldsymbol{F}_i, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \rangle = 0 \;\; \forall j \; . \tag{20}$$

Dies verwandelt den Satz von N Bewegungsgleichungen in einen neuen Satz von N_k Bewegungsgleichungen; eine für jede neue Koordinate q_i. Im Grunde sind das schon die Bewegungsgleichungen für q_i, die wir suchen. Aber die direkte Abhängigkeit von q_i muss nun noch besser herausgearbeitet werden. Wir sehen uns deshalb gleich die beiden Summen auf der rechten Seite genauer an.

Anmerkung Bevor wir hier fortfahren, eine kleine Bemerkung die geometrische Interpretation der Vektoren $\partial_j \boldsymbol{r}_i := \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$ betreffend. Wir stellen uns vor, wir halten alle Koordinaten q_j bis auf eine q_l konstant bei einem bestimmten Wert; wir variieren nur dieses q_l. Dieses definiert $\boldsymbol{r}_i(q_l)$ definiert eine Kurve in E^3: eine *Koordinatenkurve*. Als einfaches Beispiel stellen wir uns ein kartesisches Koordinatensystem $\boldsymbol{r}(x, y, z) = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ vor. Halten wir y und z konstant, erhalten wir durch Variation von x eine Gerade parallel zur x-Achse. Die Ableitung $\partial_j \boldsymbol{r}_i$ bezeichnet den Tangentialvektor bei q_l an dieser Koordinatenkurve: einen Basisvektor der q_l-Achse des lokalen *krummlinigen Koordinatensystems* (i.A. nicht normiert). In unserem Beispiel wäre dies ein Vektor in Richtung der x-Achse; dieser wäre an jedem Punkt der Kurve gleich. Beim Punkt $(q_1, q_2, \ldots, q_{N_k})$ beschreiben die Tangentialvektoren $\partial_j \boldsymbol{r}_i$ deshalb eine lokale

Basis. Da wir uns aber frei entlang aller q_i-Koordinaten bewegen dürfen, ohne die Nebenbedingungen des Problems zu verletzen, spannt die Basis lokal $\{\partial_j \boldsymbol{r}_i | \forall j\}$ den Raum aller Richtungen auf, in die wir das $i$te Teilchen noch bewegen können. Die Bewegungsgleichungen (20) projizieren nun die Beschleunigungen $\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ und die wirkenden Kräfte $\boldsymbol{F}_i$ auf diese Basis. Zwangskräfte werden in dieser Darstellung irrelevant, weil wir uns entlang dieser Richtungen ja ohne Einschränkung bewegen dürfen!

Definition. *Wir bezeichnen in der Gl. (20) die Summe*

$$Q_j := \sum_{i=1}^{N} \langle \boldsymbol{F}_i, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \rangle = \langle \boldsymbol{F}_z, \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial q_j} \rangle_z \tag{21}$$

aller projizierten Kräfte entlang q_j als generalisierte Kräfte.

Wir formen nun den anderen Summanden auf der rechten Seite von Gl. (20) um (Kettenregel und folgende Nebenrechnung)

$$\begin{aligned} m_i \langle \ddot{\boldsymbol{r}}_i, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \rangle &= m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \dot{\boldsymbol{r}}_i, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \rangle - m_i \langle \dot{\boldsymbol{r}}_i, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \rangle \\ &= m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \dot{\boldsymbol{r}}_i, \underline{\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}} \rangle - m_i \langle \dot{\boldsymbol{r}}_i, \underline{\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}} \rangle \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{m_i}{2} |\dot{\boldsymbol{r}}_i|^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{m_i}{2} |\dot{\boldsymbol{r}}_i|^2 \right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_i}{\partial q_j} \; . \end{aligned} \tag{22}$$

Dieser Ausdruck beschreibt also eine lineare Operation (Kombination von Ableitungen), die auf die kinetische Energie $T_i := m_i |\dot{\boldsymbol{r}}_i|^2/2$ des $i$ten Teilchens wirkt. Deswegen wird die gesamte Summe in Gl. (20):

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \langle \ddot{\boldsymbol{r}}_i, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \rangle = \langle m \odot \ddot{\boldsymbol{z}}, \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial q_j} \rangle_z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad ; \quad T = \sum_{i=1}^{N} T_i = \frac{1}{2} \langle m \odot \dot{\boldsymbol{z}}, \dot{\boldsymbol{z}} \rangle_z \; , \tag{23}$$

wobei T die gesamte kinetische Energie des Systems ausdrückt.

Insgesamt können wir nun die Bewegungsgleichungen in Gl. (20) schreiben als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0 \;\; \forall j \; . \tag{24}$$

Dies ist die allgemeine Form der *Euler-Lagrange Gleichungen 2. Art* (ELG2) zur Behandlung holonomer Zwangsbedingungen, die auf die Arbeiten von Leonhard Euler (*1707-†1783) und Joseph-Luois Lagrange (*1736-†1813) zurückgehen. Diese N_k Differentialgleichungen 2. Ordnung in der Zeit beschreiben die Entwicklung der generalisierten Koordinaten q_i in t. Der entscheidende Fortschritt des Formalismus besteht darin, dass diese Gleichungen auch bei Zwangsbedingungen gültig sind, solange diese (i) holonom sind und (ii) wir Koordinaten q_i finden können, die unabhängig sind und alle Nebenbedingungen erfüllen.

Nebenrechnung Die Rechenschritte, die in der zweiten Zeile von Gl. (22) unterstrichen wurden, müssen noch erläutert werden. Entsprechend der Kettenregel gilt für die totale zeitliche Ableitung

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q},t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{l=1}^{N_k} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} = \dot{\boldsymbol{r}}_i(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \tag{25}$$

und deshalb sofort (partielle Ableitung!)

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\;, \tag{26}$$

was in der Herleitung eben verwendet wurde. Als nächstes nehmen wir die partielle Ableitung von Gl. (25) nach q_j

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^{N_k} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial t}\;. \tag{27}$$

Das vergleichen wir mit der totalen Ableitung nach der Zeit t von (die Reihenfolge partieller Ableitungen ist vertauschbar)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q},t)}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^{N_k} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_l \partial q_j}\dot{q}_l + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t \partial q_j} = \sum_{l=1}^{N_k} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial t}\;, \tag{28}$$

und finden durch Vergleich mit Gl. (27) die zweite Identität

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}\;, \tag{29}$$

die in Gl. (22) verwendet wurde.

Anmerkung Die Zwangskräfte tauchen in den Bewegungsgleichungen zwar nicht mehr explizit auf, aber wir könnten diese brauchen, um evtl. die Belastung einer Konstruktion zu berechnen, die für die

Zwangsbedingungen verantwortlich ist. Hierfür kann man folgenermaßen vorgehen: Wir lösen zuerst die Bewegungsgleichungen $q_j(t)$. Hieraus erhalten wir dann für jedes Teilchen i die auf es wirkenden Kräfte $m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i(t)$ und hierdurch wegen Gl. (4)

$$\boldsymbol{Z}_i(t) = m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i(t) - \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{z}(t), t) \tag{30}$$

die Zwangskräfte zu jedem Zeitpunkt t.

1.5 Forminvarianz

Die Wahl der generalisierten Koordinaten ist nicht eindeutig. Sobald wir einen Satz Koordinaten gefunden haben, können wir immer durch die Transformationen

$$q_i = q_i(q'_1, q'_2, \ldots, q'_{N_k}, t) \tag{31}$$

auf einen neuen Satz q'_i wechseln. Beachte hier, dass sich die Geschwindigkeiten durch

$$\dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_i(q'_1, \ldots, q'_{N_k}, t) \tag{32}$$

aus q'_i *und* $\dot{q}'_i$ ergeben.

Wir nennen die Transformation $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}', t)$ eine *Punkttransformation*. Da die q_i die Nebenbedingungen erfüllen, werden auch die neuen Koordinaten q'_i diese erfüllen. Damit sind aber die Bedingungen der obigen Herleitung der ELG2 gegeben, so dass auch diese neuen Koordinaten den Bewegungsgleichungen (24) gehorchen, wenngleich mit $q_i \mapsto q'_i$ und $Q_i \mapsto Q'_i$. Diese Bewegungsgleichungen sind also forminvariant, sie sind für jeden Satz generalisierter Koordinaten gültig. Man kann dies auch explizit zeigen wie in [3].

1.6 Euler-Lagrange Gleichungen 2. Art: konservative Kräfte

In vielen Situationen findet man konservative, geschwindigkeitsunabhängige Kräfte $\boldsymbol{F}_z(\boldsymbol{z}) = -\nabla U(\boldsymbol{z})$. Die generalisierten Kräfte werden unter diesen, für den theoretischen Physiker angenehmen Bedingungen

$$Q_j = \langle \boldsymbol{F}_z, \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial q_j} \rangle_z = -\langle \nabla U(\boldsymbol{z}), \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial q_j} \rangle_z = -\frac{\partial U(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{q}, t))}{\partial q_j} =: -\frac{\partial U}{\partial q_j} \; . \tag{33}$$

Hiermit können wir die ELG2 schreiben als ($\partial U/\partial\dot{q}_i = 0$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial(T-U)}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_i} = 0 \;\; \forall i \tag{34}$$

oder einfach als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \;\; \forall i \,, \tag{35}$$

wobei wir

$$\mathcal{L} := T - U \tag{36}$$

die *Lagrange-Funktion* des Systems nennen. Diese Form der ELG2 wird am häufigsten verwendet.

Anmerkung Bei geschwindigkeitsabhängigen Potenzialen $U(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}})$ finden wir als generalisierte Kraft

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_j} \,. \tag{37}$$

Deswegen erhalten wir in diesem Falle für die Bewegungsgleichungen immer noch die ELG2 (35), aber nun mit der Lagrange-Funktion $\mathcal{L} = T - U(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}})$. Formal verändert ein generalisiertes Potenzial, das wie z.B. in der Elektrodynamik antreffen, die Konstruktion der Bewegungsgleichungen also nicht!

Sollten wir nicht alle Kräfte mittels eines Potenzials ausdrücken können, erhalten wir eine Mischform für die ELG2. Alle konservativen Kräfte sind dann als Potenzial in $\mathcal{L}$ enthalten und alle anderen als generalisierte Kräfte in $\hat{Q}_j$, d.h. wir finden die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = \hat{Q}_i \;\; \forall i \,. \tag{38}$$

1.7 Mathematisches Pendel

Kehren wir nun zurück zu unserem Eingangsproblem des Pendels. Wir betrachten den Fall, dass das Pendel einem homogenen Gravitationsfeld ausgesetzt sein soll. Wir nennen die Richtung entgegen der Schwerkraft die z-Richtung $\boldsymbol{e}_z$. Dann ist $U = mgz$. Das Pendel soll nur in der xz-Ebene schwingen. Als generalisierte Koordinate führen wir den Auslenkwinkel ϕ ein, $\boldsymbol{r} = l\sin\phi\boldsymbol{e}_x - l\cos\phi\boldsymbol{e}_z$; l ist die konstante

Pendellänge; der Aufhängungspunkt ist der Ursprung, $\boldsymbol{r} = 0$. Also ist $\dot{\boldsymbol{r}} = l\dot{\phi}\cos\phi\boldsymbol{e}_x + l\dot{\phi}\sin\phi\boldsymbol{e}_z$ und deshalb $T = m|\dot{\boldsymbol{r}}|^2/2 = ml^2\dot{\phi}^2/2$. Die Lagrange-Funktion ist

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{ml^2\dot{\phi}^2}{2} + mlg\cos\phi\ . \tag{39}$$

Daraus erhalten wir die Bewegungsgleichung für ϕ,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ml^2\dot{\phi}\right) + mlg\sin\phi = ml^2\ddot{\phi} + mlg\sin\phi = 0 \tag{40}$$

oder

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0\ . \tag{41}$$

Für kleine Auslenkungen ϕ ist $\sin\phi \approx \phi$, und deshalb ist dann die Bewegungsgleichung die eines harmonischen Oszillators mit Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{g/l}$. Der allgemeinere Fall ist nicht analytisch lösbar (aber integrabel: eindimensionales Problem mit konservativer Kraft). Man kann ihn näherungsweise mittels Methoden der Störungstheorie diskutieren.

Wir können auch noch eine Reibungskraft $\boldsymbol{F} = -\alpha\dot{\boldsymbol{r}}$ in der Betrachtung berücksichtigen, die der Bewegung des Pendels entgegenwirkt. Dieser entspricht keine konservative Kraft, so dass wir in diesem Fall die generalisierte Reibungskraft für ϕ berechnen müssen:

$$Q_\phi = \langle\boldsymbol{F}, \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi}\rangle = -\alpha\langle\dot{\boldsymbol{r}}, l\cos\phi\boldsymbol{e}_x + l\sin\phi\boldsymbol{e}_z\rangle = -\alpha\langle l\dot{\phi}\cos\phi\boldsymbol{e}_x + l\dot{\phi}\sin\phi\boldsymbol{e}_z, l\cos\phi\boldsymbol{e}_x + l\sin\phi\boldsymbol{e}_z\rangle = -\alpha l^2\dot{\phi}\ . \tag{42}$$

Die Bewegungsgleichung des Pendels ist nun ($\mathcal{L}$ enthält nur die konservativen Kräfte)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - Q_\phi = ml^2\ddot{\phi} + mlg\sin\phi + \alpha l^2\dot{\phi} = 0 \tag{43}$$

Dies gibt uns nun für kleine ϕ die Bewegungsgleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators.

1.8 Dissipationsfunktion*

Reibungseffekte lassen sich mithilfe einer sogenannten *Dissipationsfunktion* elegant in die Euler-Lagrange-Formalismus integrieren. Dies erreichen wir durch Verallgemeinerung der obigen Überlegung über Reibung bei einem mathematischen Pendel. Hierfür nehmen wir an, dass die Reibungskraft jedes Teilchens durch

$$\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{R}} = -h_i(|\boldsymbol{v}_i|)\frac{\boldsymbol{v}_i}{|\boldsymbol{v}_i|} \tag{44}$$

beschrieben werden kann, wobei $h_i(v)$ eine beliebige Funktion ist, die nur vom Betrag $|\boldsymbol{v}_i|$ der Geschwindigkeit des $i$ten Teilchens abhängt; $h_i(v)$ darf natürlich für jedes Teilchen verschieden sein. Die hier betrachteten Reibungskräfte sind also nur Funktionen der Geschwindigkeit eines Teilchens und wirken immer entgegen der aktuellen Bewegungsrichtung ($h_i(v) \geq 0$).

Empirisch findet man bei Gleitreibung z.B. $h(v) \propto v$ und bei einer Luftreibung $h(v) \propto v^2$, vorausgesetzt die Geschwindigkeiten sind nicht zu groß [3]. Beachte, dass die kartesische Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \dot{\boldsymbol{r}}_i$ i.A. eine Funktion der generalisierten Koordinaten $\boldsymbol{q}$, deren Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{q}}$ und der Zeit ist.

Um die Reibung nun in die ELG2 des $i$ten Teilchen zu integrieren, berechnen wir nun die generalisierte Reibungskraft (Erinnerung: $v_i := |\boldsymbol{v}_i|$)

$$\begin{aligned}
Q_i^{\mathrm{R}} &= \sum_{j=1}^{N}\langle \boldsymbol{F}_j^{\mathrm{R}}, \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial q_i}\rangle && (45)\\
&= -\sum_{j=1}^{N}\frac{h_j(|\boldsymbol{v}_j|)}{|\boldsymbol{v}_j|}\langle \boldsymbol{v}_j, \underline{\frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial q_i}}\rangle \overset{(!)}{=} -\sum_{j=1}^{N}\frac{h_j(|\boldsymbol{v}_j|)}{|\boldsymbol{v}_j|}\langle \boldsymbol{v}_j, \underline{\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_j}{\partial \dot{q}_i}}\rangle && (46)\\
&= -\sum_{j=1}^{N}\frac{h_j(|\boldsymbol{v}_j|)}{|\boldsymbol{v}_j|}\langle \boldsymbol{v}_j, \frac{\partial \boldsymbol{v}_j}{\partial \dot{q}_i}\rangle = -\sum_{j=1}^{N}\frac{h_j(|\boldsymbol{v}_j|)}{|\boldsymbol{v}_j|}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\langle \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_j\rangle && (47)\\
&= -\sum_{j=1}^{N}\frac{h_j(|\boldsymbol{v}_j|)}{|\boldsymbol{v}_j|}\frac{1}{2}\frac{\partial|\boldsymbol{v}_j|^2}{\partial \dot{q}_i} = -\sum_{j=1}^{N}h_j(|\boldsymbol{v}_j|)\frac{\partial|\boldsymbol{v}_j|}{\partial \dot{q}_i} && (48)\\
&= -\sum_{j=1}^{N}h_j(v_j)\frac{\partial v_j}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\sum_{j=1}^{N}\int_0^{v_j}\mathrm{d}v\, h_j(v)\,. && (49)
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt verwendet die Relation

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\int_0^{v_j(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)}\mathrm{d}v\, h_j(v) = h_j(v_j)\frac{\partial v_j}{\partial \dot{q}_i}\,, \tag{50}$$

der aus dem Hauptsatz der Integralrechnung folgt; die obere Integralgrenze ist eine Funktion der Variablen $\dot{q}_j$. Der Schritt (!) verwendet die Relation $\partial \boldsymbol{r}_j/\partial q_i = \partial \boldsymbol{v}_j/\partial \dot{q}_i$, der in der obigen Nebenrechnung schon mal bewiesen wurde.

Deshalb können wir die generalisierte Reibungskraft

$$Q_i^{\mathrm{R}} = -\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} \tag{51}$$

bequem aus der geschwindigkeitsabhängigen Dissipationsfunktion

$$P := \sum_{i=1}^{N} \int_0^{v_i} \mathrm{d}v\, h_i(v) \tag{52}$$

ableiten, die einmal für das gesamte System ausgerechnet wird. Die ELG2 mit Reibung lauten dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} = 0\ . \tag{53}$$

Wichtig ist für die folgenden Diskussionen, dass der Dissipationsterm nicht aus der Lagrange-Funktion abgeleitet werden kann, sondern als Extrakraft in die Bewegungsgleichung eingeführt wird.

Als Beispiel betrachten wir nochmal den Reibungseffekt in einem mathematischen Pendel,

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{R}} = -\alpha\dot{\boldsymbol{r}} = -h(v)\frac{\boldsymbol{v}}{v} \tag{54}$$

mit $h(v) = \alpha v$. Folglich ist nun die Dissipationsfunktion

$$P = \int_0^{v} \mathrm{d}v'\, h(v') = \frac{\alpha}{2}v^2 = \frac{\alpha}{2}l^2\dot{\phi}^2 \tag{55}$$

und hierdurch die generalisierte Reibungskraft des Freiheitsgrads ϕ

$$Q_\phi^{\mathrm{R}} = -\frac{\partial P}{\partial \dot{\phi}} = \alpha l^2\dot{\phi}\ , \tag{56}$$

in Übereinstimmung mit dem vorherigen Ergebnis.

Literatur

[1] R. Fitzpatrick. *An Introduction to Celestial Mechanics*. September 2012.

[2] J. Honerkamp and H. Römer. *Klassische Theoretische Physik: Eine Einführung*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2012.

[3] F. Kuypers. *Klassische Mechanik: mit über 300 Beispielen und Aufgaben mit Lösungen*. Lehrbuch Physik. John Wiley & Sons, Limited, 2008.

[4] H.R. Petry and B.C. Metsch. *Theoretische Mechanik*. Oldenbourg, 2005.

[5] Peter Schneider. *Einführung in die Extragalaktische Astronomie und Kosmologie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.