Rheinische
Friedrich-Wilhelms-
Universität Bonn

Klassische Theoretische Physik: Mechanik

Patrick Simon

Argelander-Institut für Astronomie

Auf dem Hügel 71

psimon@astro.uni-bonn.de

21. November 2013

1 Zweikörperproblem

Wir sehen uns nun ein ideales Zweikörperproblem an. Dafür nehmen wir an, dass zwei Punkteilchen der Massen m_1 und m_2 im Abstand r mittels eines Zentralkraft-Potenzials $U(r)$ wechselwirken und dass keine äußeren Kräfte auf die zwei Teilchen wirken, $\boldsymbol{F}_i^{(a)} = 0$. Das Zweikörpersystem ist abgeschlossen.

1.1 Äquivalentes Einkörperproblem

Um uns das Leben zusätzlich einfacher zu machen, betrachten wir die Bewegung im Schwerpunktsystem ($\boldsymbol{R} \equiv \mathcal{O}$):

$$m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = 0\,;\; m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = 0\,. \tag{1}$$

Trajektorien in jedem anderen System ergeben sich wie immer aus der Galilei-Transformation der Lösungen $\boldsymbol{z}(t) = (\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t))$.

Offenbar sind die Orte $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ wegen Gl. (1) nicht unabhängig, da $\boldsymbol{r}_1 = -m_2/m_1\boldsymbol{r}_2$. Zusätzlich hängt die Kraft der Wechselwirkung nur vom Abstand $|\boldsymbol{d}| = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ ab. Es ist deshalb zweckmäßig, direkt den Differenzvektor

$$\boldsymbol{d} := \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = -\frac{m_1 + m_2}{m_1}\boldsymbol{r}_2 = +\frac{m_1 + m_2}{m_2}\boldsymbol{r}_1 \tag{2}$$

als unabhängige Größe des Problems einzuführen; $\boldsymbol{d}$ zeigt vom Ort des Körpers 2 auf den Ort des Körpers 1. Anders ausgedrückt: Haben wir eine Lösung für $\boldsymbol{d}$, dann ist automatisch

$$\boldsymbol{r}_1 = +\frac{m_2}{M}\boldsymbol{d}\;\;;\;\; \boldsymbol{r}_2 = -\frac{m_1}{M}\boldsymbol{d}\;\;;\;\; M := m_1 + m_2\,; \tag{3}$$

M ist die Gesamtmasse des Systems. Das bedeutet, die zwei Bahnen $\boldsymbol{r}_i(t)$ sind *Punktspiegelungen* voneinander um den Schwerpunkt, jedoch mit der Einschränkung, dass deren Kurven im Vergleich zu $\boldsymbol{d}$ um den Faktor m_i/M verkleinert werden ($m_i \leq M$). Insbesondere ist die Bahn eines massereicheren Teilchens kleiner in seiner Ausdehnung als die eines masseärmeren Teilchens. Im Grenzfall von $m_1 \gg m_2$ bleibt $\boldsymbol{r}_1 \approx \boldsymbol{0}$ praktisch beim Schwerpunkt sitzen. Dies ist z.B. der Fall für die Sonne im Sonne-Erde-System.

Die Bewegungsgleichung von $\boldsymbol{d}$ ist nun

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{d} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{r}_1 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{r}_2 = \frac{\boldsymbol{F}_{12}}{m_1} - \frac{\boldsymbol{F}_{21}}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\boldsymbol{F}_{12} =: \frac{1}{\mu}\boldsymbol{F}_{12}\,, \tag{4}$$

wobei $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$ wegen des 3. Axioms. Hier haben wir eine neue Größe eingeführt, die

Reduzierte Masse.

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \, . \tag{5}$$

Die reduzierte Masse wird im Grenzfall $\mu = m_i$, falls $m_i \ll m_j$. Z.B. ist die reduzierte Masse des Sonne-Erde-Systems praktisch identisch mit der Masse der Erde. Da die Kraft zwischen den zwei Teilchen nur vom Abstand $d = |\boldsymbol{d}|$ abhängt, finden wir:

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\nabla_1 U(d) = -\nabla_1 d \, \frac{\partial U(d)}{\partial d} = -\nabla_1 |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| \, \frac{\partial U(d)}{\partial d} = -\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} \frac{\partial U(d)}{\partial d} = -\frac{\boldsymbol{d}}{d} \frac{\partial U(d)}{\partial d} \, . \tag{6}$$

Also hat die Bewegungsgleichung des *Abstandvektors* $\boldsymbol{d}$ mathematisch die Form eines Einkörperproblems mit Masse μ und Ortsvektor $\boldsymbol{d}$:

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \boldsymbol{d} = -\frac{\boldsymbol{d}}{d} \frac{\partial U(d)}{\partial d} = -\nabla_{\boldsymbol{d}} U(d) \, . \tag{7}$$

Dies ist das reduzierte Zweikörperproblem.

1.2 Bewegungsintegrale

Da wir ein konservatives Kraftfeld betrachten ohne explizite Zeitabhängigkeit, muss die Gesamtenergie dieses äquivalenten Einkörperproblems eine erhaltene Größe sein, d.h.

$$E = \frac{\mu}{2} |\dot{\boldsymbol{d}}|^2 + U(d) = \text{konst.} \tag{8}$$

Wir haben hier in der Notation berücksichtigt, dass das Potenzial sogar nur vom Betrag des Abstandvektors, $d := |\boldsymbol{d}|$, abhängen soll. Eine weitere Erhaltungsgröße ist wegen der Zentralkraft und Abgeschlossenheit des Systems der Drehimpuls

$$\boldsymbol{L} = \mu \boldsymbol{d} \times \dot{\boldsymbol{d}} = \text{konst.} \tag{9}$$

Dies definiert uns eine Bahnebene, weil insbesondere die Richtung von $\boldsymbol{L}$ erhalten ist; $\boldsymbol{d}$ und $\dot{\boldsymbol{d}}$ können für alle Zeiten nur in der von $\boldsymbol{L}$ als Normale definierten Ebene liegen. Aus diesem Grunde, wählen wir o.B.d.A. ein Koordinatensystem, in dem der Drehimpuls konstant in Richtung des Basisvektors $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{L}/L$ zeigt, d.h.

$$\boldsymbol{L} = L \boldsymbol{e}_z \, . \tag{10}$$

Die Bewegung $\boldsymbol{d}(t)$ verläuft dann in der von $\boldsymbol{e}_x$ und $\boldsymbol{e}_y$ aufgespannten Ebene, d.h.

$$\boldsymbol{d}(t) = d_x(t)\boldsymbol{e}_x + d_y(t)\boldsymbol{e}_y \ . \tag{11}$$

Als Richtung von $\boldsymbol{e}_x$ wählen wir die Richtung des Ortes $\boldsymbol{d}$ zum Zeitpunkt t_0, d.h. $\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{d}(t_0)/|\boldsymbol{d}(t_0)|$ (Anfangsbedingung bei t_0); hierdurch ist $\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x$. Im Weiteren sparen wir uns die Zeitargumente, d.h. wir schreiben etwa d_x anstatt $d_x(t)$.

Auch der Betrag $L = |\boldsymbol{L}|$ des Drehimpulses hat eine geometrische Bedeutung, nicht nur die Richtung von $\boldsymbol{L}$. Da $\boldsymbol{d} \times \dot{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{L}/\mu$, ist L/μ die Fläche dF des durch $\boldsymbol{d}$ und $\dot{\boldsymbol{d}}$ aufgespannten Parallelogramms, oder: $\mathrm{d}F = L\mathrm{d}t/(2\mu)$ ist die Fläche des Dreiecks, das durch $\boldsymbol{d}$ und der Bewegung $\dot{\boldsymbol{d}}\,\mathrm{d}t$ im infinitisimalen Zeitintervall dt aufgespannt wird. Da L eine Konstante ist, muss die von $\boldsymbol{d}$ in einem festen Zeitintervall Δt überstrichene Fläche deshalb immer gleich sein. Das ist das 2. Keplersche Gesetz im Falle des Gravitationspotenzials $U(d) \propto 1/d$!

Wir wollen nun die Bewegung in der $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$-Ebene durch Polarkoordinaten (θ, d) beschreiben, d.h.

$$\boldsymbol{d} = d\cos\theta\,\boldsymbol{e}_x + d\,\sin\theta\,\boldsymbol{e}_y = d\,\boldsymbol{e}_r \ , \tag{12}$$

$$\dot{\boldsymbol{d}} = \dot{d}\,\boldsymbol{e}_r + d\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta \ , \tag{13}$$

wie in unserer Diskussion der elliptischen Bahnbewegung in Abschnitt **??**. Da $\boldsymbol{e}_x$ in Richtung von $\boldsymbol{d}(t_0)$ zeigt, muss $\theta(t_0) = 0$ sein. In dieser *Darstellung* ist

$$|\dot{\boldsymbol{d}}|^2 = \langle \dot{d}\boldsymbol{e}_r + d\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta, \dot{d}\boldsymbol{e}_r + d\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \rangle = \dot{d}^2\langle \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_r\rangle + 2\dot{d}d\dot{\theta}\langle \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta\rangle + d^2\dot{\theta}^2\langle \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\theta\rangle = \dot{d}^2 + d^2\dot{\theta}^2 \tag{14}$$

und (Erinnerung: $\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_z$)

$$\boldsymbol{L} = \mu\boldsymbol{d} \times \dot{\boldsymbol{d}} = \mu(d\boldsymbol{e}_r) \times (\dot{d}\boldsymbol{e}_r + d\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta) = \mu d\dot{d}\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_r + \mu d^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \mu d^2\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_z = L\boldsymbol{e}_z \ . \tag{15}$$

Der letzte Schritt sagt uns, dass

$$d^2\dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{\mu^2 d^2} \ . \tag{16}$$

Hiermit können wir den kinetischen Anteil der Energie nämlich schreiben als

$$\frac{\mu}{2}|\dot{\boldsymbol{d}}|^2 = \frac{\mu}{2}\dot{d}^2 + \frac{\mu}{2}d^2\dot{\theta}^2 = \frac{\mu}{2}\dot{d}^2 + \frac{L^2}{2\mu d^2} \tag{17}$$

und die Gesamtenergie als

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{d}^2 + \frac{L^2}{2\mu d^2} + U(d) \; . \tag{18}$$

Dies ist ein sehr wichtiges Zwischenergebnis. Wir haben das ursprünglich zweidimensionale Problem mit zwei freien Koordinaten (d, θ) nun – für einen gegebenen Bahndrehimpuls L – auf nur noch einen Freiheitsgrad d reduziert. Die Energie E ist nun einzig von der Variablen d abhängig.

Wir beobachten, dass wir hier einen zusätzlichen Term erzeugt haben, der wie ein weiteres Potenzial wirkt, und der uns deshalb ein eindimensionales Problem mit dem *effektiven Potenzial*

$$U_{\rm eff}(d) := \frac{L^2}{2\mu d^2} + U(d) \tag{19}$$

beschreibt. Das effektive Potenzial wirkt wie ein abstoßende Kraft, die in Richtung des Zentrums $d = 0$ mit $1/d^3$ zunimmt. Dies ist eine direkte Konsequenz der Drehimpulserhaltung. Diese verhindert automatisch bei schwach anziehenden Potenzialen $U(d) \propto 1/d^n$ mit $n < 2$, dass sich die zwei Körper beliebig nahe kommen können. Die einzige Möglichkeit, diese *Zentrifugalbarriere* bei einem “schwachen Potenzial” zu umgehen, ist durch einen radialen Einfall der Teilchen aufeinander zu, d.h. durch $\dot{\theta}(t) = 0$ oder $L = 0$.

Damit sind wir bei unserer Reduzierung des Zweikörperproblems nun an dem Punkt angekommen, den wir schon in Abschnitt **??** diskutiert haben. Wir können die Lösung der Bewegungsgleichung $d(t)$ zwischen den Umkehrpunkten $\dot{d} = 0$ als Integral ausdrücken:

$$t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{d_0}^{d} \frac{{\rm d}s}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu s^2} - U(s)}} \; , \tag{20}$$

und desweiteren, wenn dieses gelöst ist, den Phasenwinkel als Integral (Drehimpulserhaltung)

$$\theta(t) = \int_{t_0}^{t} {\rm d}t' \, \dot{\theta}(t') = \frac{L}{\mu} \int_{t_0}^{t} \frac{{\rm d}t'}{d(t')^2} \; . \tag{21}$$

Wie schon erläutert, entspricht das positive Vorzeichen in “±” einer Phase, in dem sich der Abstand vergrößert, $\dot{d} > 0$, und das negative Vorzeichen dem entgegengesetzten Fall. Das Zweikörperproblem ist hierdurch integrabel, d.h. durch Integrale für alle Koordinaten ausdrückbar.

Zur vollständigen Bestimmung der Bahn benötigen wir noch die Anfangsbedingungen $d_0 = d(t_0)$ und den Drehimpuls der Bahn, $L = \mu d_0^2 \dot{\theta}(t_0)$. Die Anfangsbedingungen definieren auch die Orientierung der

Bahn- und Bahnebene, die durch $\boldsymbol{e}_x$ und $\boldsymbol{e}_y$ zum Ausdruck kommen. Mithilfe von Gl. (3) erhalten wir schließlich die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ aus dem Abstandsvektor $\boldsymbol{d}(t) = d(t)\cos\theta(t)\boldsymbol{e}_x + d(t)\sin\theta(t)\boldsymbol{e}_y$.

1.3 Bahnintegral

Häufig interessiert uns nicht unbedingt die zeitabhängige Bewegung der Teilchen entlang der Bahn, $\boldsymbol{d}(t)$, sondern lediglich die *Form* $\boldsymbol{d}(\theta)$ der Bahnen (Kurve mit Kurvenparameter θ). Hierfür beobachten wir folgenden Zusammenhang (Kettenregel):

$$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\dot{d}}{\dot{\theta}} = \frac{\mu d^2}{L}\dot{d} = \pm\frac{\mu d^2}{L}\sqrt{\frac{2}{\mu}}\sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu d^2} - U(d)} = \pm\frac{\sqrt{2\mu}d^2}{L}\sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu d^2} - U(d)} \tag{22}$$

oder

$$\theta(d, d_0) = \int_0^\theta \mathrm{d}\theta' = \pm\frac{L}{\sqrt{2\mu}}\int_{d_0}^d \frac{\mathrm{d}s}{s^2\sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu s^2} - U(s)}} = \mp\frac{L}{\sqrt{2\mu}}\int_{1/d_0}^{1/d}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{E - \frac{L^2u^2}{2\mu} - U(1/u)}}\,. \tag{23}$$

Im letzten Schritt habe wir die Variablentransformation $d = 1/u$ durchgeführt.

Die Umkehrpunkte sind wieder durch $\dot{d} = 0$ gegeben. Die Teilchen können die Umkehrpunkte nicht überwinden, wodurch sie entweder nur (i) zwischen zwei (benachbarten) Abständen d_{min} und d_{max} oszillieren oder (ii) nur genau einen Abstand beibehalten. Im Fall (ii) entspricht E genau einem Minimum im effektiven Potenzial $U_{\mathrm{eff}}(d)$ und $d_{\mathrm{min}} = d_{\mathrm{max}}$. Dies resultiert in eine *Kreisbahn*, weil dann $d =$ konst. (Ausnahme $L = 0$!). Im Fall (i) bewegt sich d immer zwischen d_{min} (Perizentrum) und d_{max} (Apozentrum) hin und her, wobei d_{min} und d_{max} benachbarte Punkte zu d_0 sind, die $E = U_{\mathrm{eff}}(d_{\mathrm{min}}) = U_{\mathrm{eff}}(d_{\mathrm{max}})$ erfüllen. Als Sonderfall von (i) kann $d_{\mathrm{max}} \to \infty$ sein: Der Abstand der zwei Teilchen kann beliebig groß werden.

1.4 Geschlossene Bahnen*

Von besonderem Interesse sind Bahnen (i), bei denen die Teilchen nach n_1 ganzzahligen Wiederholungen des Radialzyklus der Bewegung von d_{min} nach d_{max} die Phase $\theta(d_{\mathrm{max}}, d_{\mathrm{min}})$ um ein ganzzahliges Vielfaches n_2 von 2π verändern. In diesem Fall sind die Bahnen *geschlossen*, weil sich nach einer Periode T die Bahn

$\boldsymbol{d}(t)$ wiederholen muss, also $\boldsymbol{d}(t+T) = \boldsymbol{d}(t)$. Die Bedingung einer geschlossenen Bahn ist also:

$$\frac{n_2}{n_1} 2\pi = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{1/d_{\rm min}}^{1/d_{\rm max}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{E - \frac{L^2 u^2}{2\mu} - U(1/u)}} \,, \tag{24}$$

oder dass die Phasenänderung $\theta(d_{\rm max}, d_{\rm min})$ ein rationales Vielfaches n_2/n_1 von 2π sein muss.

Trivialerweise sind im Fall (ii) Bahnen immer geschlossen, weil sich der Abstand d nicht ändert. Ob es möglich ist, im Fall (i) geschlossene Bahnen zu erhalten, hängt vom Potenzial $U(d)$ und den Anfangsbedingungen ab.

1.5 Kepler-Problem

Das berühmteste Zweikörperproblem ist vermutlich das Kepler-Problem. Hier betrachtet man zwei gravitativ gebundene Punktmassen mit dem Potenzial

$$U(d) = -\frac{G m_1 m_2}{d} = -\frac{G M \mu}{d} := -\frac{\alpha}{d} \,. \tag{25}$$

Wir definieren insbesondere $U(d \to \infty) = 0$ (Eichfreiheit). Wir besprechen zwei Möglichkeiten, die Bahnen der Kepler-Problems analytisch zu lösen: Einen direkten Weg in diesem Abschnitt und einen sehr eleganten Weg, der keine Integrationen benötigt, im folgendem Abschnitt.

Die Bahn des Abstandes $d(\theta)$ ist nun gegeben durch:

$$\theta(d, d_0) = \mp \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{1/d_0}^{1/d} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{E + \alpha u - \frac{L^2 u^2}{2\mu}}} \,. \tag{26}$$

Das Integral ist ein Spezialfall von

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{c + bx - ax^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos^{-1}\left(\frac{b - 2ax}{\sqrt{b^2 + 4ac}}\right) \tag{27}$$

des speziellen Falles $a > 0$ und $b^2 + 4ac > 0$. $a = L^2/2\mu > 0$ ist gegeben, wenn $L > 0$. Wir schließen im Folgenden radial einfallende Teilchen ohne Drehimpuls aus.

Wie sieht es mit der Bedingung $b^2 + 4ac = \alpha^2 + 2EL^2/\mu > 0$ aus? Dies ist offensichtlich erfüllt, sobald $E > -\alpha^2\mu/(2L^2)$. E ist aber immer größer als das Minimum von $U_{\rm min} = U_{\rm eff}(d_{\rm umin})$ bei $d_{\rm umin} = L^2/(\alpha\mu)$, da die kinetische Energie in E immer positiv oder null sein muss, also

$$E \geq U_{\rm min} = \frac{L^2}{2\mu d_{\rm umin}^2} - \frac{\alpha}{d_{\rm umin}} = -\frac{\alpha^2\mu}{2L^2} \; . \tag{28}$$

Diese Bedingung ist also genau dann immer erfüllt, wenn $E > U_{\rm min}$, was immer dann gegeben ist, wenn wir *keine exakte Kreisbahn* mit $\dot{d} = 0$ betrachten. Wir wollen diesen Fall also auch ausschließen, merken aber an, dass dieser dennoch als stetische Ergänzung in der abschließenden Lösung enthalten ist. Er ist also nicht wirklich problematisch.

Wir führen zwei neue konstante Größen ein,

$$p := \frac{L^2}{\mu\alpha} \;\; ; \;\; \epsilon := \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{\mu\alpha^2}} \; , \tag{29}$$

und erhalten so

$$\theta(d) - \theta(d_0) = \theta(d) = \frac{L}{\sqrt{2\mu}}\frac{\sqrt{2\mu}}{L}\cos^{-1}\left(\frac{p/d-1}{\epsilon}\right)\Bigg|_{d_0}^{d} = \cos^{-1}\left(\frac{p/d-1}{\epsilon}\right) + \Delta\theta \; , \tag{30}$$

oder aufgelöst nach dem Abstand d:

$$d(\theta) = \frac{p}{1+\epsilon\cos\left(\theta - \Delta\theta\right)} \; . \tag{31}$$

Die Integrationskonstante $\Delta\theta$ auf der rechten Seite entspricht dem Wert der Stammtfunktion bei d_0. Beachte, dass wir $\theta(d_0) \equiv 0$ definiert hatten. Die Phase $\theta = +\Delta\theta$ entspricht dem kleinsten Abstand $d_{\rm min} = p/(1+\epsilon)$ (Perizentrum).

Diese Lösungen lassen sich in *vier Familien* unterteilen:

$\epsilon = 0$: Kreisbahnen mit Radius (Abstand) p;

$0 < \epsilon < 1$: Ellipsen mit $d_{\rm min} = p/(1+\epsilon)$ und $d_{\rm max} = p/(1-\epsilon)$; oder der großen Halbachse $a = p/(1-\epsilon^2)$ und der kleinen Halbachse $b = \sqrt{pa}$ (folgt aus $\epsilon^2 = 1 - b^2/a^2$);

$\epsilon = 1$: Parabelbahnen mit der kleinsten Annährung $d_{\rm min} = p/2$ aber keiner Obergrenze der Entfernung;

$\epsilon > 1$: Hyperbelbahnen mit kleinstem Abstand $d_{\rm min} = p/(1+\epsilon)$ und auch keiner Obergrenze $d_{\rm max}$;

Die geschlossenen Bahnen der Kreise und Ellipsen erfüllen $E < 0$, wohingegen Hyperbelbahnen $E > 0$; der Spezialfall $E = 0$ ist gegeben für Parabelbahnen. Beachte, dass das Argument der Wurzel in der Definition von ϵ wegen $E \geq U_{\min}$ niemals negativ werden kann.

Alle diese Lösungen sind *Kegelschnitte*, die man in einem geeigneten Koordinatensystem als Lösungen $y(x)$ der quadratischen Gleichung

$$y^2 = 2px + (\epsilon^2 - 1)x^2 \tag{32}$$

zusammenfassen kann.

Anmerkung Eine analytische Lösung der zeitabhängigen Bewegung der Kepler-Problems ist übrigens nicht bekannt! Man löst diesen Teil des Problems durch Bestimmung von $\theta(t)$ aber einfach numerisch.

1.6 3. Keplersches Gesetz

Der Fall $\epsilon < 1$ beschreibt das 1. Keplersche Gesetz: Planeten bewegen sich auf Kreis- oder Ellipsenbahnen. Diese Bahnen sind geschlossen, weil sich die Körper nach der Umlaufzeit T bei gleicher Phase exakt wieder beim gleichen Abstandsvektor $\boldsymbol{d}$ befinden. Aus der Drehimpulserhaltung folgt, dass die Fläche, die vom Abstandsvektor $\boldsymbol{d}$ pro Zeit überstrichen wird, eine Konstante ist. Das ist das 2. Keplersche Gesetz.

Was ist die Umlaufzeit T? Hierzu ziehen wir die Impulserhaltung $L = \mu d^2\dot{\theta} =$ konst. heran. Diese besagt, dass der Vektor $\boldsymbol{d}$ in der Zeit dt konstant die Fläche $\mathrm{d}F = L/(2\mu)\mathrm{d}t$ überstreicht. Die Fläche einer Ellipse beträgt $F = \pi ab$, weshalb

$$T = F\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right)^{-1} = \frac{2\mu\pi ab}{L} = \frac{2\mu\pi}{L}a\sqrt{ap} = \frac{2\mu\pi}{L}\sqrt{p}a^{3/2} \,. \tag{33}$$

Wir haben oben gesehen, dass $p = L^2/(\mu\alpha)$, weshalb die Umlaufdauer T zu

$$T = \frac{2\mu\pi}{L}\frac{L}{\sqrt{\mu\alpha}}a^{3/2} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}a^{3/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{G(m_1+m_2)}}a^{3/2} \propto a^{3/2} \tag{34}$$

wegen $\alpha = Gm_1m_2$ wird. Das ist das 3. Keplersche Gesetz. Wir können dies auch schreiben als:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi}{G(m_1+m_2)} = \text{konst}\,. \tag{35}$$

Da die Masse m_1 der Sonne deutlich größer ist als die Masse aller anderen Körper des Sonnensystems, ist $m_1 + m_2 \approx m_1$, wodurch T^2/a^3 für alle Planeten praktisch den gleichen Wert hat.

1.7 Runge-Lenz-Vektor*

Abschließen wollen wir die Diskussion des Kepler-Problems mit einer weiteren berühmten Erhaltungsgröße. Wir hatten bisher die Erhaltungsgrößen $\boldsymbol{L} = \mu\boldsymbol{d} \times \dot{\boldsymbol{d}}$ (Gesamtdrehimpuls), $m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = 0$ (Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem) und E (Gesamtenergie). Wir zeigen nun, dass sich hieraus für das Kepler-Problem eine neue Erhaltungsgröße ableiten läßt.

Die Bewegungsgleichung des Kepler-Problems ist

$$\ddot{\boldsymbol{d}} + \frac{\alpha}{\mu}\frac{\boldsymbol{d}}{d^3} = 0 \,. \tag{36}$$

Nehmen wir auf beiden Seiten das Vektorprodukt mit dem konstanten Drehimpuls $\boldsymbol{L}$, dann ergibt sich (Erinnerung: $d = |\boldsymbol{d}|$; BACCAB-Regel)

$$\begin{aligned}
0 &= \ddot{\boldsymbol{d}} \times \boldsymbol{L} + \frac{\alpha}{\mu d^3}\boldsymbol{d} \times \boldsymbol{L} && (37)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\boldsymbol{d}} \times \boldsymbol{L}) + \frac{\alpha}{d^3}\left(\langle \boldsymbol{d}, \dot{\boldsymbol{d}}\rangle \boldsymbol{d} - d^2\dot{\boldsymbol{d}}\right) && (38)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\boldsymbol{d}} \times \boldsymbol{L}) + \alpha\left(\frac{\dot{d}}{d^2}\boldsymbol{d} - \frac{1}{d}\dot{\boldsymbol{d}}\right) && (39)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\boldsymbol{d}} \times \boldsymbol{L} - \alpha\frac{\boldsymbol{d}}{d}\right) \,. && (40)
\end{aligned}$$

Im dritten Schritt haben wir $\dot{d} = \langle \dot{\boldsymbol{d}}, \boldsymbol{d}\rangle/d$ verwendet; $d = |\boldsymbol{d}|$. Wir folgern also hier, dass der Vektor

$$\boldsymbol{A} := \dot{\boldsymbol{d}} \times \boldsymbol{L} - \alpha\frac{\boldsymbol{d}}{d} \tag{41}$$

entlang der Bahn $\boldsymbol{d}(t)$ eine Erhaltungsgröße sein muss. Wir nennen $\boldsymbol{A}$ den *Runge-Lenz-Vektor* oder auch Laplace-Runge-Lenz-Vektor.

Der Runge-Lenz-Vektor liegt in der Bahnebene, weil $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{L}\rangle = 0$. Und $\boldsymbol{A}$ ist eine Erhaltungsgröße des Kepler-Problems, deshalb muss hier auch insbesondere seine Richtung konstant sein. Wir können diese

Richtung als eine Orientierung der Bahn *in* der Bahnebene verstehen, die für das Kepler-Problem gegeben ist. In welche Richtung zeigt nun $\boldsymbol{A}$? Dies sehen wir durch (Erinnerung: $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \rangle$)

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{d} \rangle = |\boldsymbol{A}| d \cos\phi = \langle \boldsymbol{d}, \dot{\boldsymbol{d}} \times \boldsymbol{L} \rangle - \frac{\alpha}{d} \langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{d} \rangle = \langle \boldsymbol{L}, \boldsymbol{d} \times \dot{\boldsymbol{d}} \rangle - \alpha d = \frac{1}{\mu} \langle \boldsymbol{L}, \boldsymbol{L} \rangle - \alpha d = \frac{L^2}{\mu} - \alpha d \ . \tag{42}$$

Lösen wir dies nach dem Abstand d auf, erhalten wir

$$d(\phi) = \frac{L^2}{\mu\alpha} \frac{1}{1 + \frac{|\boldsymbol{A}|}{\mu\alpha} \cos\phi} = \frac{p}{1 + \frac{|\boldsymbol{A}|}{\mu\alpha} \cos\phi} = \frac{p}{1 + \epsilon \cos\phi} \ . \tag{43}$$

Dies ist aber wieder der Kegelschnitt, Gl. (31), aus dem vorherigen Abschnitt, wenn wir $\epsilon := |A|/(\mu\alpha)$ setzen. Der Vergleich mit dieser Lösung zeigt uns, dass die Orientierung von $\boldsymbol{A}$ bei $\phi = 0$ in Richtung des Perizentrums zeigt, und dass der Betrag $|A| = \epsilon\mu\alpha$ direkt mit der Elliptizität der Bahn zusammenhängt.

Wir erhalten also mittels $\boldsymbol{A}$ die Lösung der Bahngleichung für das Kepler-Problem, ohne dass wir diesmal irgend welche Integrale berechnen mußten! Dies demonstriert die Macht von Erhaltungsgrößen in der theoretischen Physik. Mehr Details kann man in **(author?)** [2] finden, wo die Lösung des Kepler-Problems koordinatenfrei hergeleitet wird.

1.8 Das gestörte Zweikörperproblem*

Die Kepler-Bahnen gehen von sehr idealisierten Bedingungen aus, nämlich davon, dass wir nur die isolierte Wechselwirkung genau zweier Teilchen betrachten müssen. Sehen wir uns z.B. das Sonnensystem an, wird aber klar, dass hier mehr Wechselwirkungen eine Rolle spielen, die einen Einfluß auf die Bahn eines Planeten haben sollten; etwa die Anziehung der großen Gasplaneten. Dennoch ist die Schwerkraft in Richtung der Sonne die dominierende Anziehungskraft, die die Form der Planetenbahn maßgeblich bestimmt. Die Lösung des Zweikörperproblems ist deshalb vermutlich in 1. Näherung immer noch richtig.

Die exakte *analytische* Lösung dieses Vielkörperproblems im Sonnensystem ist aber nicht möglich, weil schon das Dreikörperproblem nicht mehr allgemein integrabel ist, wie von Henri Poincare (*1854-†1912) bewiesen wurde. Aus diesem Grund hat man die *Störungsrechnung* entwickelt, die versucht, kleine Abweichungen von einem idealen Problem zu approximieren. Wir wollen die Logik dieser Methode anhand eines relativ einfachen Problems demonstrieren.

Wir betrachten die Kraft $\nabla U(r)$ eines Zweikörper-Zentralkraftproblems ohne äußere Kräfte; r ist der Abstand vom Schwerpunkt. Die Masse des einen Körpers (Sonne) sei viel größer als die Masse m des anderen Körpers (Planet), d.h. $\mu \approx m$. In diesem Fall erhalten wir als Bewegungsgleichung des Abstands r (Ableitung der Gesamtenergie; Kettenregel):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\dot{r}^2\right) = m\ddot{r}\dot{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - U(r)\right) = \frac{L^2}{mr^3}\dot{r} - \frac{\partial U(r)}{\partial r}\dot{r} \tag{44}$$

oder

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\partial U(r)}{\partial r} \; . \tag{45}$$

Im Fall des Kepler-Problems ist $U(r) = -\alpha/r$. Wir nehmen an, dass wir eine Lösung $r(t)$ für diesen Fall kennen (ideales Problem).

Wir stellen uns nun vor, dass das ursprüngliche Potenzial $U(r)$ ein wenig durch ein zusätzliches Potenzial $\delta U(r)$ gestört wird. Es soll $|\delta U(r)| \ll |U(r)|$ gelten: das Störpotenzial ist sehr klein. Z.B. kann man der Störung einer Planetenbahn durch die Schwerkraft anderer Planeten in der gleichen Bahnebene ein Ringpotenzial $\delta U_i(r) \propto 4GM_i a_i^2/r^3$ zuordnen, wenn sich diese bei $a_i < r$ befinden; oder ein Potenzial $\delta U_i(r) \propto GM_i r^3/(4a_i^2)$ für $a_i > r$; M_i ist die Planetenmasse und a_i der Abstand des störenden Planeten von der Sonne [1]. Wir erhalten wegen δU eine neue Bewegungsgleichung (rechts)

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\partial U(r)}{\partial r} - \frac{\partial \delta U(r)}{\partial r} \; . \tag{46}$$

Wir vermuten, dass diese Störung zumindest für einen kleinen Zeitraum nur einen geringen Effekt $|\delta r| \ll r$ auf den Abstand haben wird. Wir machen deshalb den folgenden *Störungsansatz* für die neue Bewegungsgleichung

$$r(t) = r_0(t) + \delta r(t) \; , \tag{47}$$

wobei $r_0(t)$ die Lösung für den Abstand r des idealen Problems darstellt, d.h. diese Lösung erfüllt:

$$m\ddot{r}_0 = \frac{L^2}{mr_0^3} - \frac{\partial U(r_0)}{\partial r_0} \; . \tag{48}$$

Welche Bewegungsgleichung gilt nun für $\delta r_0(t)$? Wir setzen den Ansatz (47) in die Bewegungsgleichung (46) ein:

$$m\ddot{r}_0 + m\ddot{\delta r} = \frac{L^2}{m(r_0 + \delta r)^3} - \left.\frac{\partial U(r)}{\partial r}\right|_{r=r_0+\delta r} - \left.\frac{\partial \delta U(r)}{\partial r}\right|_{r=r_0+\delta r} \; . \tag{49}$$

Weil δr klein sein soll, machen wir eine Taylor-Entwicklung der Terme auf der rechten Seite um r_0 bis zur ersten Ordnung in δr (lineare Störung), d.h.

$$\frac{L^2}{m(r_0+\delta r)^3} = \frac{L^2}{mr_0^3} - \frac{3L^2}{mr_0^4}\delta r + \mathcal{O}(\delta r^2)\;; \tag{50}$$

$$\left.\frac{\partial U(r)}{\partial r}\right|_{r=r_0+\delta r} = \frac{\partial U(r_0)}{\partial r_0} + \frac{\partial^2 U(r_0)}{\partial r_0^2}\delta r + \mathcal{O}(\delta r^2)\;; \tag{51}$$

$$\left.\frac{\partial \delta U(r)}{\partial r}\right|_{r=r_0+\delta r} = \frac{\partial \delta U(r_0)}{\partial r_0} + \frac{\partial^2 \delta U(r_0)}{\partial r_0^2}\delta r + \mathcal{O}(\delta r^2)\;. \tag{52}$$

Setzen wir diese Terme in Gl. (46) ein und benutzen die Relation Gl. (48), dann finden wir die Bewegungsgleichung der linearen Störung

$$m\ddot{\delta r} + \left(\frac{\partial^2 U(r_0)}{\partial r_0^2} + \frac{\partial^2 \delta U(r_0)}{\partial r_0^2} + \frac{3L^2}{mr_0^4}\right)\delta r = -\frac{\partial \delta U(r_0)}{\partial r_0}\;. \tag{53}$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen, müssten wir nun für gegebene Anfangsbedingungen erst die ideale Lösung $r_0(t)$ bestimmen. Dann würden wir diese i.A. zeitabhängige Lösung in die obigen Differentialgleichung zweiter Ordnung einsetzen, um die Störung $\delta r(t)$ zu berechnen. Für die Anfangsbedingung der Störung nehmen wir an, dass

1. diese bei t_0 verschwindet, $\delta r(t_0) = 0$;
2. und dass diese erst durch das Störpotenzial δU bei t_0 hervorgerufen wird, d.h. $\dot{\delta r}(t_0) = 0$. Dies hat zur Konsequenz, dass $\delta r(t) = 0$ für alle t, falls wir mit $\delta U =$ konst. keine Störung haben sollten!

Die Lösung des Störungsproblems kann je nach Aufgabenstellung anspruchsvoll sein. Wir kommen dann nur mit numerischen Methoden weiter. Die Lösung ist dann aber auch nur für Zeiträume sinnvoll, die klein genug sind, damit tatsächlich $|\delta r| \ll r$ bleibt. Ist dies nicht mehr gegeben, bricht die lineare Näherung zusammen, und wir müssen höhere Ordnungen in δr miteinbeziehen oder einen völlig neuen Ansatz suchen.

Als Anwendung betrachten wir nun den Fall $r_0(t) \approx$ konst., wie wir das bei einer annäherenden Kreisbahn erwarten würden. Hierfür ist es zweckmäßig, die obigen Differentialgleichung nochmal umzuschreiben, indem wir den Drehimpulsterm mit L^2 des effektiven Potenzials durch die Bewegungsgleichung (48) ersetzen,

$$m\ddot{\delta r}+\left(\frac{\partial^2 U(r_0)}{\partial r_0^2}+\frac{\partial^2\delta U(r_0)}{\partial r_0^2}+\frac{3m\ddot{r}_0}{r_0}+\frac{3}{r_0}\frac{\partial U(r_0)}{\partial r_0}\right)\delta r=-\frac{\partial\delta U(r_0)}{\partial r_0}\;. \tag{54}$$

Da $r_0\approx$ konst., ist $3m\ddot{r}_0/r_0\approx 0$ und deshalb

$$m\ddot{\delta r}+C\delta r=-\frac{\partial\delta U(r_0)}{\partial r_0}\;\;;\;\;C:=\frac{\partial^2 U(r_0)}{\partial r_0^2}+\frac{\partial^2\delta U(r_0)}{\partial r_0^2}+\frac{3}{r_0}\frac{\partial U(r_0)}{\partial r_0}\;; \tag{55}$$

C ist eine Konstante weil $r_0=$ konst. Nun ist es sinnvoll, die Störung etwas umzudefinieren,

$$\delta r=\hat{\delta r}+\frac{1}{C}\frac{\partial\delta U(r_0)}{\partial r_0}\;, \tag{56}$$

um den konstanten Term auf der rechten Seite der inhomogenen Differentialgleichung zu beseitigen. Wir erhalten nun mit

$$\frac{\mathrm{d}^2\hat{\delta r}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{C}{m}\hat{\delta r}=0 \tag{57}$$

eine wohlbekannte homogene Differentialgleichung für $\hat{\delta r}(t)$.

Für $C<0$ wächst die Lösung exponenziell an, ein sanfter Hinweis, dass die lineare Störung nur für sehr kurze Zeit eine sinnvolle Beschreibung sein kann.

Bei $C=0$ ist $\ddot{\hat{\delta r}}(t)=0$ und wegen der Anfangsbedingungen $\delta r(t)=0$ für alle Zeiten. Es gibt also keine Störung in diesem Falle.

Der Fall $C>0$ ist sinnvoller, weil wir dafür die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators erhalten; einer Störung wirkt eine *rückstellende Kraft* entgegen; unser System hat eine gewisse Stabilität. Die allgemeine Lösung dieses Falles ist

$$\hat{\delta r}(t)=A\cos\left(\omega[t-t_0]\right)+B\sin\left(\omega[t-t_0]\right) \tag{58}$$

mit $\omega^2:=C/m$ und zwei Konstanten A und B. Die Konstanten ergeben sich aus den oben beschriebenen Anfangsbedingungen $\delta r(t_0)=\dot{\delta r}(t_0)=0$ oder $\hat{\delta r}(t_0)=-\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}\delta U(r_0)}{\mathrm{d}r_0}$ und $\dot{\hat{\delta r}}(t_0)=0$. Die Rückstellung erzeugt eine oszillierende Variation des idealen Problems der Art

$$\delta r(t)=\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}\delta U(r_0)}{\mathrm{d}r_0}\Big(1-\cos\left(\omega[t-t_0]\right)\Big) \tag{59}$$

mit der Kreisfrequenz ω.

Die oszillierende Störung hat demnach eine Periodendauer von $T_{\rm p} = 2\pi/\omega$. Ist auf der anderen Seite die Periodendauer des idealen Orbits T, dann werden wir bei einer idealen geschlossenen Bahn nur dann zum Anfangsort $\boldsymbol{r}(t_0)$ zurückkehren können, wenn $n_1 T = n_2 T_{\rm p}/2$ und n_1, n_2 natürliche Zahlen sind. Nur in diesem Fall kann das Teilchen nach n_1 Perioden mit Phase $n_1 2\pi$ wieder zu

$$r(t_0 + n_1 T) = r_0(t_0 + n_1 T) + \delta r(t_0 + n_2 T_{\rm p}/2) = r_0(t_0) + 0 = r_0(t_0) \tag{60}$$

zurückkehren. Folglich muss das Perioden-Verältnis $T_{\rm p}/T = 2n_1/n_2$ einer rationalen Zahl entsprechen.

Ist dies nicht der Fall, dann wird die gestörte Bahn nicht mehr geschlossen sein, was man z.B. beim Planeten Merkur sehr deutlich als Periheldrehung beobachten kann (der Runge-Lenz-Vektor ändert langsam seine Richtung). Diese Drehung wird dadurch verursacht, dass das Newtonsche Gravitationsgesetz in geringer Entfernung zur Sonne ungenau wird und mit $\delta U(r) = -\epsilon/r^3$ geringfügig korrigiert werden muss. Diese Korrektur folgt aus der Allgemeinen Relativitätstheorie von Albert Einstein (*1879-†1955). Man findet aber auch Periheldrehungen der Bahnen anderer Planeten im Sonnensystem – insbesondere Mars und Saturn (um die 20 Bogensekunden pro Jahr) –, die durch eine klassische gravitative Wechselwirkung der Planeten untereinander hervorgerufen wird (durch das Ringpotenzial).

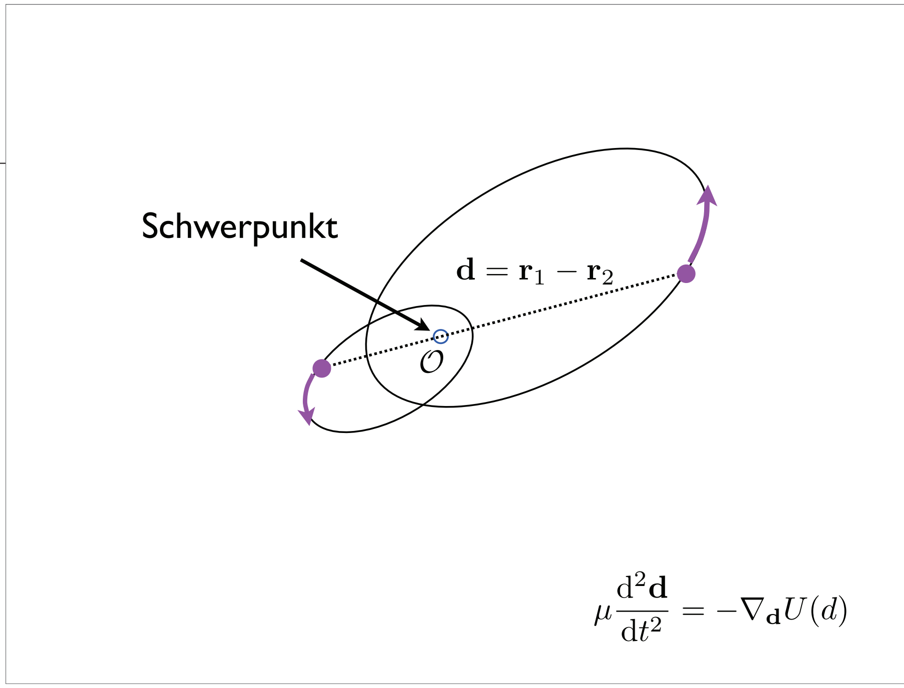
Anmerkung Für ein allgemeines Störpotenzial $\delta U(r) = -\beta r^n$ erhält man

$$C = \frac{\alpha}{r_0^3} - n(n-1)\beta r_0^{n-2} \,, \tag{61}$$

so dass als Bedingung der Stabilität

$$C > 0 \Longleftrightarrow \alpha - n(n-1)\beta r_0^{n+1} > 0 \tag{62}$$

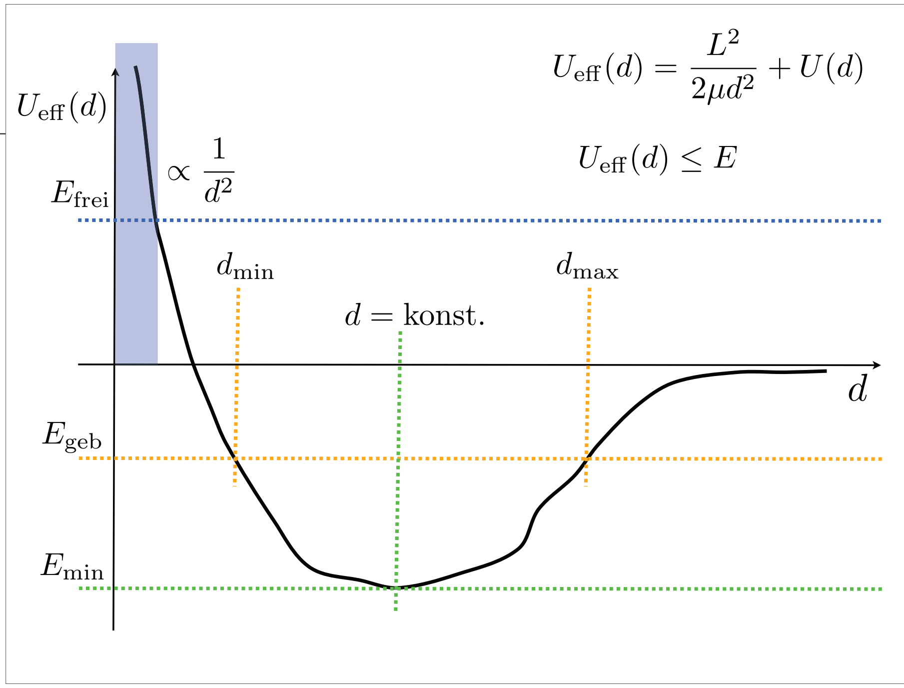
verlangt werden muss.

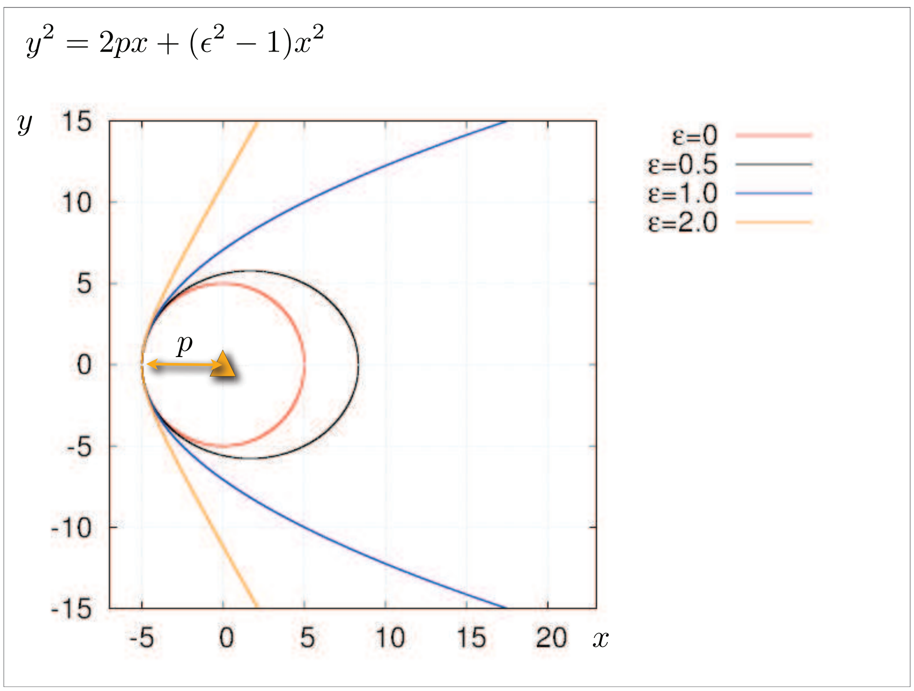


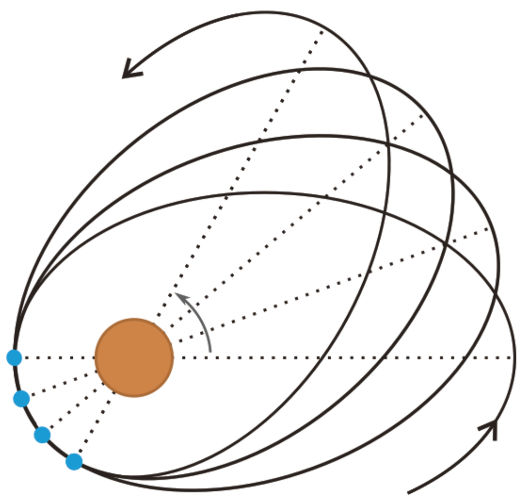
Literatur

[1] R. Fitzpatrick. *An Introduction to Celestial Mechanics*. September 2012.

[2] H.R. Petry and B.C. Metsch. *Theoretische Mechanik*. Oldenbourg, 2005.


$U_{\mathrm{eff}}(d) = \frac{L^2}{2\mu d^2} + U(d)$
$U_{\mathrm{eff}}(d) \leq E$
$U_{\mathrm{eff}}(d)$
$\propto \frac{1}{d^2}$
E_{frei}
d_{min}
d_{max}
$d = \mathrm{konst.}$
d
E_{geb}
E_{min}


$y^2 = 2px + (\epsilon^2 - 1)x^2$
y
15
10
5
0
-5
-10
-15
-5 0 5 10 15 20 x
p
ε=0
ε=0.5
ε=1.0
ε=2.0



Quelle: Wikipedia (Absidendrehung)