



Klassische Theoretische Physik: Mechanik

Patrick Simon

Argelander-Institut für Astronomie

Auf dem Hügel 71

psimon@astro.uni-bonn.de

21. November 2013

1 Vielteilchensysteme

Wir möchten nun die vorangegangenen Überlegungen hinsichtlich der Bewegungsgleichung eines Teilchens auf Systeme mit N Körpern erweitern. Wir stellen uns vor, dass diese Körper wiederum Punktmassen sind. Jeder Körper folgt seiner eigenen Trajektorie $\mathbf{r}_i(t) \in V^3$ und hat seine eigene träge Masse m_i .

Wir könnten jetzt die Bewegungsgleichung jedes Körpers separat betrachten und nur noch die eventuell vorhandenen Wechselwirkungen zwischen den Körpern berücksichtigen. Dies würde eine ganze Menge Schreibarbeit bedeuten, weshalb man das gesamte System formal in einen neuen Raum einbettet. Statt N Ortsvektoren erhalten wir einen kombinierten Ortsvektor, statt N Kraftvektoren erhalten wir nur einen etc. Aus atomistischer Sicht sind alle makroskopischen Objekte extreme Vielteilchensysteme: Sie bestehen aus $\sim 10^{23}$ Molekülen, welche jeweils wiederum wenige wechselwirkende Atome umfassen. Die folgenden Überlegungen deuten aber an, dass man diese Systeme makroskopisch als relativ einfache Körper mit wenigen Freiheitsgraden betrachten kann!

Um die N Körper formal in einem Vektor zusammenzufassen, definieren wir

$$\mathbf{z}(t) = (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \dots, \mathbf{r}_N(t)) \quad (1)$$

als Bahnkurve $\mathbf{z}(t) \in Z$ im *Konfigurationsraum*

$$Z = V^3 \oplus \dots \oplus V^3 \text{ (Ursprung } O \text{)}. \quad (2)$$

Dieser Raum erhält dadurch eine Vektorraumstruktur, dass wir unter einer Verknüpfung $a\mathbf{z}^{(1)} + b\mathbf{z}^{(2)}$ von $\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)} \in Z$ und $a, b \in \mathbb{R}$ folgendes verstehen:

$$a\mathbf{z}^{(1)} + b\mathbf{z}^{(2)} := (a\mathbf{r}_1^{(1)} + b\mathbf{r}_1^{(2)}, \dots, a\mathbf{r}_N^{(1)} + b\mathbf{r}_N^{(2)}). \quad (3)$$

Wir verknüpfen also nur Vektorenkomponenten, die das gleiche Teilchen betreffen. Desweiteren gibt es noch ein neutrales Element $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ und ein inverses Element $-\mathbf{z} = (-\mathbf{r}_1, \dots, -\mathbf{r}_N)$ für jeden Vektor \mathbf{z} . Die Dimension des Konfigurationsraums ist $\dim(Z) = N \cdot \dim E^3 = 3N$. Beachte, dass durch diese

Formalisierung automatisch eine komponentenweise Ableitung oder Integration wie in

$$\frac{dz}{d\alpha} = \left(\frac{d\mathbf{r}_1}{d\alpha}, \dots, \frac{d\mathbf{r}_N}{d\alpha} \right), \quad (4)$$

$$\int d\alpha z = \left(\int d\alpha \mathbf{r}_1, \dots, \int d\alpha \mathbf{r}_N \right), \quad (5)$$

gegeben ist. Desweiteren definieren wir für den Konfigurationsraum ein Skalarprodukt $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_z : Z \times Z \mapsto \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\langle \mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)} \rangle_z := \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{r}_i^{(1)}, \mathbf{r}_i^{(2)} \rangle. \quad (6)$$

Hierdurch wird Z auch zu einem metrischen affinen Raum.

Wir fassen alle Kräfte F_i , die auf die Körper i wirken in einer Produktkraft $F_z(z) \in Z$ zusammen:

$$\mathbf{F}(z) = \left(\mathbf{F}_1(z), \dots, \mathbf{F}_N(z) \right). \quad (7)$$

Die Kraft $F_i(z)$ auf das i te Teilchen hängt i.A. von den Positionen aller anderen Teilchen ab. Wir betrachten hier im Weiteren Kräfte, die *nur* vom Ort und nicht den Geschwindigkeiten oder explizit der Zeit t abhängen.

Die Bewegungsgleichungen aller N Teilchen werden also nun elegant zusammengefasst durch

$$\frac{d^2}{dt^2} (m \odot z(t)) = \mathbf{F}(z(t)) \quad ; \quad m \odot \mathbf{w} := (m_1 \mathbf{w}_1, \dots, m_N \mathbf{w}_N). \quad (8)$$

Das gesamte System bewegt sich als eine Trajektorie $z(t)$ durch Z . Dies ist immer noch eine Differentialgleichung 2. Ordnung, aber nun mit $3N$ Freiheitsgraden. Folglich benötigen wir $3N$ Positionen und $3N$ Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt t , also $6N$ Konstanten, um ein Anfangswertproblem eindeutig zu lösen.

1.1 Erhaltung der Gesamtenergie

Unter der Arbeit des gesamten N -Körper-Systems entlang der Kurve $z(t)$ verstehen wir die Summe aller Teilarbeiten der Körper, nämlich

$$W(z_0, z_1) = \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^{t_1} dt \langle \mathbf{F}_i(z(t)), \dot{\mathbf{r}}_i(t) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} dt \langle \mathbf{F}_z(z(t)), \dot{z}(t) \rangle_z = \int_{z_0}^{z_1} \langle \mathbf{F}_z(z), dz \rangle_z. \quad (9)$$

Durch unsere geeignete Definition des Skalaprodukts in Z wird die Arbeit entlang der N -Körper-Kurve ein Wegintegral in Z entlang der Kurve $z(t)$.

Die mathematische Struktur des Raumes ist vergleichbar mit dem Fall eines einzelnen Körpers. Deswegen greift auch hier unsere vorherige Argumentation hinsichtlich konservativer Felder. Hängt nun die gesamte Arbeit des Systems nicht vom Weg einer beliebigen geschlossenen Kurve C in Z ab,

$$\oint_C \langle \mathbf{F}_z(z), dz \rangle_z = 0, \quad (10)$$

dann gibt es ein Potenzial $U(z)$, für das gilt:

$$\mathbf{F}_z(z) = -\nabla U(z) ; \quad \nabla U(z) := (\nabla_1 U(z), \dots, \nabla_N U(z)) ; \quad W(z_0, z_1) = U(z_0) - U(z_1). \quad (11)$$

Hier verstehen wir unter

$$\nabla_i := \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y_i} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z_i} \mathbf{e}_z \quad (12)$$

den Gradienten bezüglich des Ortvektors $\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{e}_x + y_i \mathbf{e}_y + z_i \mathbf{e}_z$ des i ten Körpers, und unter ∇ den Gradienten im Raum Z . Ein geschlossener Weg $z(t)$ bedeutet, dass sich *alle* Teilchen zum Ausgangspunkt zurückbewegen. Die wichtige Schlussfolgerung ist hier, dass wir im Falle der konservativen Felder \mathbf{F}_i ein Skalarpotenzial $U(z)$ des gesamten Systems finden können!

Wir finden noch mehr. Zusätzlich ergibt sich wieder, dass sich die Arbeit entlang der Kurve $z(t)$ durch die Differenz der gesamten kinetischen Energie des Systems an den Endpunkten der N -Teilchen-Kurve ausdrücken läßt:

$$W(t_0, t_1) = \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^{t_1} dt m_i \langle \dot{\mathbf{r}}_i(t), \dot{\mathbf{r}}_i(t) \rangle = \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \dot{\mathbf{r}}_i(t), m_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) \rangle \quad (13)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \dot{z}(t), m \odot \dot{z}(t) \rangle_z = T(t_1) - T(t_0) \quad (14)$$

Die gesamte kinetische Energie des Systems ist also

$$T := \frac{1}{2} \langle \dot{z}, m \odot \dot{z} \rangle_z = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} |\dot{\mathbf{r}}_i|^2. \quad (15)$$

Also gilt nach wie vor für konservative Kraftfelder, dass

$$T(t_1) - T(t_0) = W(t_0, t_1) = U(z(t_0)) - U(z(t_1)), \quad (16)$$

und wir erhalten eine schöne Verallgemeinerung der Energieerhaltung für N -Körper-Systeme:

$$T(t) + U(\mathbf{z}(t)) = E = \text{konst.} \quad (17)$$

Die Summe *aller* kinetischen und potenziellen Energien des Systems ist also eine Konstante entlang der Bahn $\mathbf{z}(t)$.

1.2 Innere und äußere Kräfte

Wir unterscheiden zwischen *inneren Kräften* $\mathbf{F}^{(i)}$ und *äußeren Kräften* $\mathbf{F}^{(a)}$. Eine äußere Kraft $\mathbf{F}_j^{(a)}(\mathbf{r}_j)$, die auf den j ten Körper wirkt, hängt nur vom Ort dieses einzelnen Körpers, \mathbf{r}_j , ab. Eine innere Kraft $\mathbf{F}^{(i)}(\mathbf{z})$ hängt auch von den Orten aller anderen Teilchen ab, also im Allgemeinen von der Konfiguration \mathbf{z} . Betrachten wir beispielsweise einen makroskopischen Körper wie einen Stein, dann sind die Kräfte, die zwischen den Molekülen des Steines wirken, innere Kräfte (im Wesentlichen elektrische), wohingegen die Schwerkraft der Erde auf die Steinmoleküle äußeren Kräften zugeordnet werden.

Es zeigt sich, dass innere Kräfte normalerweise reine Zweiteilchenwechselwirkungen sind, die nur vom Abstand $|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|$ zweier Teilchen k und l abhängen. Hierdurch kann man das Vielteilchenpotenzial allgemein schreiben als

$$U(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^N U_k^{(a)}(\mathbf{r}_k) + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{k-1} U_{kl}^{(i)}(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|) = \sum_{k=1}^N U_k^{(a)}(\mathbf{r}_k) + \frac{1}{2} \sum_{k \neq l}^N U_{kl}^{(i)}(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|). \quad (18)$$

Hier bezeichnet $U_k^{(a)}(\mathbf{r})$ das äußere Potenzial, das auf Teilchen k wirkt, und $U_{kl}^{(i)}(r)$ ist das innere Potenzial der Kraft zwischen den Teilchen k und l mit Abstand r . Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass die inneren Potenziale nur vom Abstand abhängen: Wir können \mathbf{r}_k und \mathbf{r}_l vertauschen, ohne das Potenzial zu verändern. Das Potenzial ist demnach normalerweise nach Einteilchen- und Zweiteilchenwechselwirkungen separierbar.

Als einfaches Beispiel betrachte ein System zweier Teilchen, $N = 2$, die gravitativ gebunden sind, und auf das keine äußeren Kräfte wirken,

$$U(\mathbf{z}) = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (19)$$

Alle im System wirkenden Kräfte sind also (Hinweis: Kettenregel):

$$\mathbf{F}_z(\mathbf{z}) = -\nabla U(\mathbf{z}) = (\mathbf{F}_1(\mathbf{z}), \mathbf{F}_2(\mathbf{z})) ; \quad (20)$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{z}) = -\nabla_1 U(\mathbf{z}) = Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} ; \quad (21)$$

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{z}) = -\nabla_2 U(\mathbf{z}) = Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} ; \quad (22)$$

Wir finden demnach $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, was nach dem 3. Axiom notwendigerweise in einem Zweiteilchensystem ohne äußeren Kräfte erfüllt sein muss!

1.3 Gesamtimpuls

Der Impuls eines Partikels ist $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Das 1. Axiom sagt uns, dass dieser erhalten bleibt, wenn keine resultierenden Kräfte auf dieses Teilchen wirken, also $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}(t)$ oder $\dot{\mathbf{p}} = 0$ für alle t . Dies führt zu einer gleichförmigen Bewegung, weil \mathbf{v} konstant bleibt (wenn m konstant). Wir fragen uns nun, ob es eine ähnliche Relation für Vielteilchensysteme gibt, wenn keine äußeren Kräfte auf diese wirken.

Da wir das System als Ganzes diskutieren wollen, definieren wir uns die (erhaltene) *Gesamtmasse*

$$M := \sum_{i=1}^N m_i . \quad (23)$$

Nun betrachten wir den *Gesamtimpuls* \mathbf{P} ,

$$\mathbf{P} := \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = M \frac{d}{dt} \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M} =: M \dot{\mathbf{R}} , \quad (24)$$

und beobachten, dass wir diesem ein hypothetisches Partikel zuordnen können, das die Masse M besitzt und sich entlang der Orte des *Massenschwerpunkts*

$$\mathbf{R} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad (25)$$

bewegt. Der Massenschwerpunkt ist das gewichtete Mittel aller Orte \mathbf{r}_i mit dem Gewicht m_i/M . Offensichtlich ist ein System mit $N = 1$ Partikeln nur ein Sonderfall dieser Betrachtung; dann wäre $M = m_1$ und $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1$.

Wie verändert sich die Bahn des Schwerpunktes, wenn innere und äußere Kräfte wirken? Dazu sehen wir uns die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses an:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\ddot{\mathbf{R}} = \sum_{k=1}^N m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_{k=1}^N \left(\mathbf{F}_k^{(a)} + \sum_{l=1, l \neq k}^N \mathbf{F}_{kl}^{(i)} \right). \quad (26)$$

Hier sind $\mathbf{F}_k^{(a)}$ die äußere Kraft auf das k te Teilchen und $\mathbf{F}_{kl}^{(i)}$ die innere Kraft die von Teilchen l auf Teilchen k ausgeübt wird. Wir wissen nun aber aufgrund des 3. Axioms, dass $\mathbf{F}_{kl}^{(i)} = -\mathbf{F}_{lk}^{(i)}$ sein muss. Deshalb müssen sich alle Summanden in

$$\sum_{l=1, l \neq k}^N \mathbf{F}_{kl}^{(i)} = 0 \quad (27)$$

immer gegenseitig aufheben. Also ist

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{(a)} =: \mathbf{F}^{(a)} \quad (28)$$

die Änderung des Gesamtimpulses die Summe $\mathbf{F}^{(a)}$ aller äußeren Kräfte – egal, wie komplex die vielfältigen Wechselwirkungen der Teilchen untereinander sind.

Bedenke, dass ein makroskopischer Körper aus $\sim 10^{23}$ Molekülen besteht, die alle miteinander wechselwirken. Sind diese inneren Kräfte stark genug und das System stabil genug, dass sich die Abstände, $|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l| = \text{konst.}$, der Moleküle untereinander makroskopisch nicht merklich verändern, dann wird sich das gesamte System starr entlang der Massenschwerpunkt-Trajektorie bewegen. Das ist aber genau das, was wir in unserer alltäglichen Erfahrung mit festen Körpern erleben! Diese *starrten Körper* werden wir später noch genauer behandeln.

Außerdem basiert unsere Punktteilchen-Näherung auf genau diesem Verhalten. Auch wenn etwa Planeten und die Sonne nicht punktförmig sind, können wir sie praktisch immer, ohne allzu große Fehler zu machen, als punktförmig idealisieren, um die Planetenbewegung zu beschreiben. Ebenso können wir das gesamte Sonnensystem als punktförmig approximieren, wenn wir dessen Bewegung um das galaktische Zentrum beschreiben wollen. Oder ganze Galaxien als Punktmassen, um die Dynamik von vielen Galaxien zu beschreiben, wenn diese sich nicht zu nahe kommen.

Wenn sich alle äußeren Kräfte zusammen aufheben oder keine äußeren Kräfte vorhanden sind (*abgeschlossenes System*), dann bewegt sich der Massenschwerpunkt also gleichförmig. In diesem Fall ist es sinnvoll, zur mathematischen Beschreibung ein Beobachtersystem zu wählen, in dem der Massenschwerpunkt in Ruhe ist. Wir machen also eine Galilei-Transformation mit $\Delta \mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}$ und $\Delta \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{R}(t_0)$.

Definition. *In einem Schwerpunktsystem ohne äußere Kräfte ruht der Massenschwerpunkt im Ursprung, d.h.*

$$\mathbf{R}' = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = 0 \quad ; \quad M \dot{\mathbf{R}}' = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i = 0 . \quad (29)$$

Insbesondere verschwindet in diesem Inertialsystem der Gesamtimpuls (rechts). Für die Beschreibung eines Systems ist das Schwerpunktsystem häufig die bevorzugte Wahl, weil hier die Trajektorien einfacher werden.

Anmerkung Außerdem folgt, dass zwei getrennte Systeme mit separatem $(M_1, \dot{\mathbf{R}}_1)$ und $(M_2, \dot{\mathbf{R}}_2)$ zusammen den Gesamtimpuls $M_1 \dot{\mathbf{R}}_1 + M_2 \dot{\mathbf{R}}_2$ besitzen sowie den gemeinsamen Schwerpunkt

$$\mathbf{R} = \frac{M_1 \mathbf{R}_1 + M_2 \mathbf{R}_2}{M_1 + M_2} . \quad (30)$$

Der gemeinsame Schwerpunkt von Erde ($M_1 \approx 6 \times 10^{24}$ kg; $\mathbf{R}_1 := 0$) und Mond ($M_2 \approx 7 \times 10^{22}$ kg; $\mathbf{R}_2 \approx 3.8 \times 10^5$ km) liegt also mit $R \approx 4400$ km innerhalb des Erdradius von ≈ 6370 km.

1.4 Gesamtdrehimpuls

Definition. *Unter*

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (31)$$

verstehen wir den Drehimpuls einer Punktmasse.

Ebenso wie der Impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ist dieser erhalten, wenn keine Kraft \mathbf{F} auf das Teilchen wirkt, weil

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = m \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = m \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times (m \dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0 . \quad (32)$$

Die Größe $\mathbf{n} := \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ist das *Drehmoment*, das im kräftefreien Fall offensichtlich verschwindet. In diesem Fall ist \mathbf{l} genau wie \mathbf{p} eine Erhaltungsgröße. Im Gegensatz zum Impuls \mathbf{p} ist der Drehimpuls aber nur empfindlich für Kräfte, die senkrecht zu \mathbf{r} wirken. Demnach ist \mathbf{l} erhalten bei einem Zentralkraftproblem, in dem die Kraft immer entlang \mathbf{r} wirkt, obwohl \mathbf{p} nicht erhalten ist. Weiterhin ist \mathbf{l} im Gegensatz zum Impuls explizit abhängig von der Definition des Ursprungs O des E^3 , weil eine Verschiebung $\Delta \mathbf{r}$ den Wert um

$$\mathbf{l}' = m(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) \times \mathbf{v} = \mathbf{l} + \Delta \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (33)$$

ändert. Übrigens ist $\mathbf{n}' = \mathbf{l}' \neq 0$, selbst wenn die Kraft parallel zu \mathbf{r} ist, da i.A. $\Delta \mathbf{r} \times \mathbf{F} \neq 0$.

Wir sehen uns nun den *Gesamtdrehimpuls* eines Vielteilchensystems an:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \quad (34)$$

Bezeichnen wir $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R}$ und $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \dot{\mathbf{R}}$ durch Orte und Geschwindigkeiten im Schwerpunktsystem, dann finden wir nun:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}) \times (\mathbf{v}'_i + \dot{\mathbf{R}}) \quad (35)$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{R}} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R} \times \mathbf{v}'_i + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} \quad (36)$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i + 0 \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times 0 + M \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} \quad (37)$$

$$= \mathbf{L}' + M \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}. \quad (38)$$

Der Gesamtdrehimpuls ist die Summe aus Gesamtdrehimpuls \mathbf{L}' im Schwerpunktsystem und dem Drehimpuls, den wir erhalten, wenn wir das System als Punktmasse mit M , Ort \mathbf{R} und Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{R}}$ betrachten.

Die zeitliche Ableitung dieses Ausdrucks gibt das Gesamtdrehmoment, das auf das System wirkt,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}'}{dt} + \mathbf{R} \times (M\ddot{\mathbf{R}}) = \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\mathbf{r}}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i + \mathbf{r}'_i \times \ddot{\mathbf{r}}'_i) + \mathbf{R} \times \mathbf{F}^{(a)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{N}^{(a)}. \quad (39)$$

Der rechte Term entspricht dem Drehmoment $\mathbf{N}^{(a)} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}^{(a)}$, das alle äußeren Kräfte zusammen auf den Massenschwerpunkt ausüben. Der linke Term ist die Summe aller Drehmomente auf die Teilchen im Schwerpunktsystem, dadurch dass auf das i te Teilchen die resultierende Kraft \mathbf{F}_i ausgeübt wird. Wir können das Drehmoment im Schwerpunktsystem weiter vereinfachen,

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{k=1}^N \mathbf{r}'_k \times \left(\mathbf{F}_k^{(a)} + \sum_{l=1, l \neq k}^N \mathbf{F}_{kl}^{(i)} \right) \quad (40)$$

$$= \sum_{k=1}^N \mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k^{(a)} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq l}^N (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_{kl}^{(i)} + \mathbf{r}'_l \times \mathbf{F}_{lk}^{(i)}) \quad (41)$$

$$= \sum_{k=1}^N \mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k^{(a)} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq l}^N (\mathbf{r}'_k - \mathbf{r}'_l) \times \mathbf{F}_{kl}^{(i)} \quad (42)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^N \mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k^{(a)}, \quad (43)$$

wenn (*) die inneren Kräfte zwischen zwei Teilchen k und l parallel zum Verbindungsvektor $\mathbf{r}'_k - \mathbf{r}'_l$ sind, d.h. $(\mathbf{r}'_k - \mathbf{r}'_l) \times \mathbf{F}_{kl}^{(i)} = 0$. Dies ist “in allen praktischen Fällen” gegeben [1]. Dann sind für das Gesamtdrehmoment also die *inneren Kräfte irrelevant*, und wir finden:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{k=1}^N \mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k^{(a)} + \mathbf{N}^{(a)} =: \mathbf{N}^{(a)'} + \mathbf{N}^{(a)}. \quad (44)$$

Mit $\mathbf{N}^{(a)'}$ bezeichnen wir die Summe aller äußeren Drehmomente im Schwerpunktsystem.

Interessanterweise gilt $\mathbf{N}' = \dot{\mathbf{L}}' = \mathbf{N}^{(a)'}$ in *jedem* Beobachtersystem, bei dem der Massenschwerpunkt im Ursprung O ruht; also auch in Nicht-Inertialsystemen (beschleunigten Bezugssystemen)! Eine Beweis hierfür kann man z.B. in [2] finden.

1.5 Virialsatz

Wir sehen uns nun zeitlich gemittelte Größen eines Vielteilchensystems mit Potenzial $U(\mathbf{z})$ an, um zu sehen, ob wir allgemeine statistische Aussagen machen können. Alle Teilchenimpulse des System fassen wir als Vektor im Konfigurationsraum Z zusammen,

$$\mathbf{p} := (m \odot \dot{\mathbf{z}}) = (m_1 \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, m_N \dot{\mathbf{r}}_N). \quad (45)$$

Das ist *nicht* der Gesamtdrehimpuls, sondern eine vektorielle Liste aller Einzelimpulse. Die gesamte kinetische Energie T des Systems ist nach Gl. (15) also

$$2T = \langle \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{p} \rangle_z = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle_z - \langle \mathbf{z}, \dot{\mathbf{p}} \rangle_z = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle_z - \langle \mathbf{z}, \mathbf{F}_z(\mathbf{z}) \rangle_z = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle_z + \langle \mathbf{z}, \nabla U(\mathbf{z}) \rangle_z \quad (46)$$

oder

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle_z = 2T - \langle \mathbf{z}, \nabla U(\mathbf{z}) \rangle_z . \quad (47)$$

Haben wir nun ein *periodisches* System, das nach jeder Periode Δt exakt in seinen Ausgangszustand zurückkehrt, dann muss gelten

$$\langle \mathbf{z}(t), \mathbf{p}(t) \rangle_z = \langle \mathbf{z}(t + \Delta t), \mathbf{p}(t + \Delta t) \rangle_z . \quad (48)$$

Wir definieren als Mittelwert einer Periode Δt der Funktion $f(t)$:

$$\overline{f(t)}^{\Delta t} := \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0 - \Delta t/2}^{t_0 + \Delta t/2} dt' f(t') . \quad (49)$$

Der Bezugszeitpunkt t_0 ist hier unerheblich, weil ein periodisches System für jedes t nach jedem Zeitraum Δt in den Ursprungszustand zurückkehrt. Wir finden nun für Gl. (47) als Mittelwert

$$\overline{\frac{d}{dt} \langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle_z}^{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left(\langle \mathbf{z}(t + \Delta t/2), \mathbf{p}(t + \Delta t/2) \rangle_z - \langle \mathbf{z}(t - \Delta t/2), \mathbf{p}(t - \Delta t/2) \rangle_z \right) \quad (50)$$

$$= 0 \quad (51)$$

$$= 2\overline{T}^{\Delta t} - \overline{\langle \mathbf{z}, \nabla U(\mathbf{z}) \rangle_z}^{\Delta t} , \quad (52)$$

und damit den sogenannten

Virialsatz.

$$\overline{T}^{\Delta t} = \frac{1}{2} \overline{\langle \mathbf{z}, \nabla U(\mathbf{z}) \rangle_z}^{\Delta t} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \overline{\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i(\mathbf{z}) \rangle}^{\Delta t} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \overline{\langle \mathbf{r}_i, \nabla_i U(\mathbf{z}) \rangle}^{\Delta t} . \quad (53)$$

Dieses Schmuckstück der statistischen Physik wurde von Rudolf J.E. Clausius (*1822-†1888) entdeckt; er lebte übrigens von 1869 bis zu seinem Tode im damals preußischen Bonn. Der Satz macht eine direkte Aussage über den Mittelwert einer Periode der kinetischen Energie (links) eines Systems im Vergleich zum Mittelwert des sogenannten Virials (rechts), das direkt mit der potenziellen Energie verknüpft ist.

In dieser Form ist der Virialsatz strikt gültig, setzt aber ein periodisches System voraus. Im Allgemeinen ist ein periodisches System mit vielen Teilchen sehr unwahrscheinlich. Deshalb ist die Anwendung des Virialsatzes in dieser Version auf einfache Systeme mit wenigen Teilchen beschränkt.

Was passiert, wenn wir statt des Mittelwertes über ΔT einen Mittelwert über einen großen Zeitraum nehmen? Wir erhalten dafür im Grenzfall

$$\overline{f(t)} := \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Delta t} \int_{-\Delta t}^{+\Delta t} dt' f(t') . \quad (54)$$

Ist $|\langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{z}}| \leq A$ mit $A \in \mathbb{R}^{>0}$ beschränkt, weil das System nur ein endliches Volumen einnimmt und Geschwindigkeiten nicht beliebig groß werden, dann erhalten wir immer noch

$$\left| \overline{\frac{d}{dt} \langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{z}}} \right| \leq \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{2A}{2\Delta t} = 0 = 2\overline{T} - \overline{\langle \mathbf{z}, \nabla U(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbf{z}}} \quad (55)$$

oder

$$2\overline{T} - \overline{\langle \mathbf{z}, \nabla U(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbf{z}}} = 0 . \quad (56)$$

Diese geläufigere Version des Virialsatzes gilt auch für nicht-periodische Systeme, deren $\langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{z}}$ aber *beschränkt sein muss*. Diese Form ist trivialerweise auch für periodische System gültig, weil periodische Systeme immer beschränkt sind.

1.6 Homogene Potenziale

Wir können den Virialsatz noch konkreter machen, in dem wir anmerken, dass viele praktische Potenziale $U(\mathbf{z})$ *homogene Funktionen* vom Grade k sind, d.h. man findet oft

$$U(\alpha \mathbf{z}) = \alpha^k U(\mathbf{z}) \quad (57)$$

für beliebige Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zum Beispiel erfüllt das Gravitationspotenzial $U(\alpha \mathbf{r}) = \text{konst}/(\alpha r) = \alpha^{-1} U(\mathbf{r})$; also ist hier $k = -1$. Oder es ist $U(\alpha \mathbf{r}) = C \alpha^2 r^2 = \alpha^2 U(\mathbf{r})$ für einen harmonischen Oszillator, d.h. $k = +2$.

Für homogene Potenziale folgt einerseits aus deren Definition

$$\frac{\partial U(\alpha \mathbf{z})}{\partial \alpha} = U(\mathbf{z}) \frac{\partial \alpha^k}{\partial \alpha} = k \alpha^{k-1} U(\mathbf{z}) \quad (58)$$

und andererseits durch Anwendung der Kettenregel, dass

$$\frac{\partial U(\alpha z)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial(\alpha r_i)}{\partial \alpha}, \nabla_i U(z) \right\rangle_{z=\alpha z} = \left\langle \frac{\partial(\alpha z)}{\partial \alpha}, \nabla U(z) \right\rangle_{z=\alpha z} = \langle z, \nabla U(z) \rangle_{z=\alpha z}. \quad (59)$$

Setzen wir hier nun $\alpha = 1$, ergibt sich eine verblüffend einfache Beziehung homogener Potenziale nach Leonhard Euler (*1701-†1783),

$$\langle z, \nabla U(z) \rangle_z = kU(z), \quad (60)$$

die wir im Virialsatz ersetzen können. Deswegen erhalten wir nun

$$2\bar{T} - k\overline{U(z)} = 0 \quad (61)$$

oder für die mittlere Gesamtenergie des Systems

$$\bar{E} = \bar{T} + \overline{U(z)} = \frac{2+k}{2} \overline{U(z)} = \frac{2+k}{k} \bar{T}. \quad (62)$$

Wir erinnern daran, dass E im Falle eines konservativen Potentials eine Erhaltungsgröße ist, d.h. $\bar{E} = E$.

Der Virialsatz gibt uns also einen Zusammenhang zwischen der mittleren kinetischen und mittleren potenziellen Energie des N -Teilchen-Systems (bei beschränkten Systemen). Bei harmonischen Oszillatoren mit $k = 2$ finden wir, dass die mittlere kinetische und die mittlere potenzielle Energie im zeitlichen Mittel gleichverteilt sind, d.h. $\overline{U(z)} = \bar{T} = \frac{1}{2}\bar{E}$. Bei gravitativ gebundenen Systemen, $k = -1$, und $\bar{E} < 0$ findet man hingegen $\bar{T} = -\overline{U(z)}/2 = -\bar{E}$, also keine Gleichverteilung.

Befindet sich ein *einziges* Teilchen in einem Zentralkraft-Potenzial $U(r) = -\alpha/r$ auf einer Kreisbahn mit Radius $r = r_0 = \text{konst.}$, dann ist im Mittel für einen Umlauf $\bar{T} = \alpha/(2r_0) = m\bar{v}^2/2$ oder $\bar{v}^2 = \alpha/(mr_0)$. Wir können also die mittlere quadratische Geschwindigkeit entlang der Bahn bestimmen, ohne direkt $r(t)$ berechnet zu haben. Ist der Radius der Bahn nicht genau konstant sondern nur im Mittel gleich r_0 mit kleinen Schwankungen $\delta r \ll r_0$ mit $\overline{\delta r} = 0$, dann ist die mittlere quadratische Geschwindigkeit etwa (Taylor-Entwicklung nach δr bis δr^2):

$$\bar{v}^2 = \frac{\alpha}{m} \overline{\frac{1}{r}} = \frac{\alpha}{m} \overline{\frac{1}{r_0 + \delta r}} \approx \frac{\alpha}{m} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{\delta r}{r_0^2} + \frac{\delta r^2}{r_0^3} \right) = \frac{\alpha}{mr_0} \left(1 + \frac{\delta r^2}{r_0^2} \right). \quad (63)$$

Der Wert von \bar{v}^2 nimmt mit den Schwankungen $\overline{\delta r^2}$ des Abstands also immer zu.

Anmerkung Man könnte sich jetzt fragen, welchen praktischen Nutzen eine Aussage über den zeitlichen Mittelwert über große Zeiträume haben könnte. Tatsächlich ist es so, dass Systeme mit vielen Teilchen häufig gut durchmischt oder *ergodisch* sind. Damit meinen wir, dass die Häufigkeitsverteilung der Orte und Geschwindigkeiten aller Teilchen des Systems zu einem gegebenen Zeitpunkt sich nicht merklich von der entsprechenden Verteilung eines anderen Zeitpunktes unterscheidet. Dies ist normalerweise bei Systemen mit sehr vielen Teilchen wie Gasen aber auch bei großen astronomischen Systemen gegeben, die gravitativ gebunden sind (Kugelsternhaufen, Galaxienhaufen). Dadurch ist die gesamte kinetische Energie T und die gesamte potenzielle Energie $U(\mathbf{z})$ zu allen Zeiten etwa konstant. Der Virialsatz wird für also für ergodische Systeme nicht nur eine Aussage über das zeitliche Mittel von T und U sondern auch eine Aussage über T und U zu jedem Zeitpunkt! Mittels der Methoden der statistischen Physik ist es sogar möglich, die Verteilungen der Orte und Geschwindigkeiten unter gegebenen Rahmenbedingungen (konstantes E z.B.) zu berechnen, was unser Wissen über die statistischen Eigenschaften eines ergodischen Vielteilchensystems nochmal deutlich vergrößert; siehe z.B. [1].

1.7 Eine Anwendung des Virialsatzes: Galaxienhaufen*

Den Virialsatz können wir z.B. ausnutzen, um die Gesamtmasse eines Galaxienhaufens zu schätzen. Galaxienhaufen sind die größten gravitativ gebundenen Systeme, die wir kennen. Die großen Galaxienhaufen enthalten typischerweise $N \sim 10^3$ gut sichtbare, helle Galaxien. Wären Galaxienhaufen keine gebundenen Systeme, dann würden die Geschwindigkeitsdispersionen $\sigma^2 = \overline{|v|^2}/3 \sim (10^3 \text{ km/s})^2$ der Haufenmitglieder zu groß sein, um die Haufen langlebig zu machen; σ^2 kann durch die Dopplerverschiebung von Absorptionslinien in den Spektren der Galaxien ermittelt werden. Wir beobachten aber einfach zu viele Galaxienhaufen, um diese als vorübergehende, kurzlebige Strukturen erklären zu können.

Die Gravitationskraft ist die dominierende Kraft auf kosmologischen Skalen, d.h. $k = -1$. Durch kinematische Abschätzungen wissen wir außerdem, dass diese Systeme genügend Zeit hatten, um gut durchmischt zu sein. Aufgrund des Virialsatzes erwarten wir also $2\overline{T} + \overline{U(\mathbf{z})} = 0$, wobei \overline{T} die gesamte kinetische Energie der Galaxien ist und $\overline{U(\mathbf{z})}$ deren gesamte gravitative Bindungsenergie. Wir betrachten Galaxien auf diesen Skalen als Punktmassen mit den Massen m_i und der Helligkeiten L_i . Aufgrund unseres

Verständnisses der Physik von Galaxien ist es plausibel anzunehmen, dass $m_i \propto L_i$. Deshalb sind für $M = \sum m_i$ und $L_g = \sum L_i$

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{v}_i|^2 = \frac{M}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} |\mathbf{v}_i|^2 = \frac{M}{2} \sum_{i=1}^N \frac{L_i}{L_g} |\mathbf{v}_i|^2 \sim \frac{3}{2} M \sigma^2. \quad (64)$$

Für die *beobachtbare* Geschwindigkeitsdispersion σ^2 gewichten wir jede einzelne Galaxie mit L_i/L_g . Die gesamte potenzielle Energie des Haufens ist

$$\overline{U(\mathbf{z})} = -\frac{G}{2} \sum_{i \neq j}^N \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = -\frac{M^2 G}{2} \sum_{i \neq j}^N \frac{L_i L_j}{L_g^2 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (65)$$

Dieser Ausdruck stellt uns vor ein kleines Problem, weil \mathbf{r}_i den räumlichen Orten der Galaxien entspricht, wir aber üblicherweise nur deren projizierte Position am Himmel kennen. Oder, wenn wir die Entfernung des Haufens bestimmen können, dann kennen wir nur die projizierten Abstände der Galaxienpaare i und j am Himmel. Galaxienhaufen erscheinen ungefähr als rotationssymmetrische Gebilde am Himmel, so dass wir vermuten können, die Haufenmitglieder sind im Mittel räumlich mehr oder weniger kugelsymmetrisch verteilt. Hierdurch können wir im Mittel

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^{-1} = \frac{2}{\pi} |\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_j|^{-1} \quad (66)$$

benutzen, wobei \mathbf{d}_i die *Tangentialkomponente* von \mathbf{r}_i an der Himmelskugel darstellt [3]; $|\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_j| = \theta_{ij} D$, wenn θ_{ij} der Winkelabstand der Galaxien i und j ist (in RAD) und D der Abstand des Haufens.

Dann ergibt sich aus dem Virialsatz

$$3M\sigma^2 - \frac{M^2 G}{\pi D} \sum_{i \neq j}^N \frac{L_i L_j}{L_g^2 \theta_{ij}} = 0 \quad (67)$$

oder

$$M = \frac{3\pi\sigma^2 D}{G} \left(\sum_{i \neq j}^N \frac{L_i L_j}{L_g^2 \theta_{ij}} \right)^{-1}. \quad (68)$$

Für typische Werte von $\sigma \sim 10^3$ km/s, $(\sum_{i \neq j} L_i L_j / L_g^2 \theta_{ij} / D)^{-1} \sim 0.5$ Mpc und $N \sim 10^3$ ergibt sich $M \sim 10^{15} M_\odot$. Hier ist $M_\odot \sim 2 \times 10^{30}$ kg die Masse der Sonne und 1 Mpc $\sim 3 \times 10^{22}$ m ist ein gebräuchliches Entfernungsmaß in der Astronomie. Zum Vergleich: Die Entfernung unserer Nachbarspiralgalaxie Andromeda M31 ist ca. 0.78 Mpc.

Anmerkung Hellen Galaxien entspricht in einem Galaxienhaufen also etwa eine Masse von $m \sim M/N \sim 10^{12} M_\odot$, was grob 100 mal mehr Masse entspricht als wir durch Sterne in diesen Galaxien erklären können. Man schließt daraus, dass der größte Teil der Masse in Galaxienhaufen nicht durch die sichtbaren Sterne zustande kommt. Durch weitere Messungen weiß man, dass auch atomares oder molekulares Gas in und zwischen den Galaxien nicht ausreicht um dieses Massendefizit zu erklären. Diesem in der Kosmologie allgegenwärtige Massendefizit ordnet man eine hypothetische *Dunklen Materie* zu, deren physikalische Natur bisher unbekannt ist, aber durch Beobachtungen eingegrenzt werden kann. Es ist möglich, dass dieses Defizit durch eine falsche Annahme von $k = -1$ im Gravitationsgesetz erklärt wird, was bedeuten würde, wir müssten unsere physikalische Beschreibung des Gravitationsgesetzes verändern (Allgemeine Relativitätstheorie). Vielleicht ist auch eine Kombination von modifiziertem Gravitationsgesetz und physikalischer Dunkler Materie die richtige Antwort. Abgesehen vom Dunkle-Materie-Phänomen gibt es jedoch bisher keinen testbaren Hinweis auf Abweichungen vom ansonsten gut getesteten Standard-Gravitationsgesetz. Die Arbeit an einer Antwort auf diese wichtige Frage ist ein aktuelles Forschungsgebiet der physikalischen Grundlagenforschung.

1.8 Mechanische Ähnlichkeit*

Der Virialsatz macht eine statistische Aussage über ein Vielteilchensystem, ohne dass wir die Trajektorien im Detail wirklich wissen müssen. Eine Diskussion der mechanischen Ähnlichkeit bietet uns eine weitere Methode, etwas über die Eigenschaften der Lösungen zu erfahren, ohne diese explizit zu kennen.

Nehmen wir beispielsweise an, wir haben eine beliebige Lösung $z(t)$ der Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}(m \odot z)(t) + \nabla U(z(t)) = 0 \quad (69)$$

und fragen uns nun, ob wir daraus in einfacher Weise eine Lösung $z'(t)$ des verwandten Problems

$$\gamma \frac{d^2}{dt^2}(m \odot z')(t) + \delta \nabla U(z'(t)) = 0 \quad (70)$$

finden können; $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ seien beliebige Konstanten. Dies bedeutet also: Wir verändern alle Massen um den Faktor γ , $m_i \mapsto \gamma m_i$, und ändern die Stärke des Potentials um $U(z) \mapsto \delta U(z)$. Eine Lösung dieses

Problems beantwortet etwa die Frage “Was passiert, wenn die Masse der Teilchen größer ist?” oder “Was, wenn das Potenzial stärker ist als angenommen?”.

Um dieses Problem zu lösen, raten wir aus $z(t)$ eine neue Lösung mittels $z'(t) = \alpha z(t/\beta)$. Wir vermuten also, dass durch die Ähnlichkeit des alten Problems Gl. (69) mit dem neuen Problem Gl. (70), die Lösungen auch ähnlich bleiben, wengleich die Trajektorien vielleicht insgesamt größer ($\alpha > 1$) oder kleiner ($\alpha < 1$) werden oder die Bewegung der Teilchen entlang der Bahnen vielleicht schneller ($\beta < 1$) oder langsamer ($\beta > 1$) wird. Setzen wir diese Vermutung in die neue Bewegungsgleichung ein, kriegen wir

$$\alpha\gamma \frac{d^2}{dt^2}(m \odot z)(t\beta^{-1}) + \delta \nabla U(\alpha z(t\beta^{-1})) = 0. \quad (71)$$

Wir führen zusätzlich eine neue Zeitkoordinate $s = t\beta^{-1}$ ein:

$$\frac{\alpha\gamma}{\delta\beta^2} \frac{d^2}{ds^2}(m \odot z)(s) + \nabla U(\alpha z(s)) = 0. \quad (72)$$

Offensichtlich sieht diese “neue” Bewegungsgleichung exakt aus wie die alte Gl. (69), wenn $\alpha = 1$ und $\gamma/\delta = \beta^2$, sprich $z(s)$ ist eine Lösung in diesem speziellen Fall.

Dies bedeutet u.a.: Verändern wir nicht das Potenzial, $\delta = 1$, aber die Massen der Teilchen um γ , dann ist $z(t\beta^{-1})$ immer noch eine Lösung, aber nun mit dem Zeitparameter $\beta = \sqrt{\gamma}$; die Teilchen bewegen sich mit einer anderen Geschwindigkeit entlang gleicher Trajektorien. Lassen wir andererseits die Massen unverändert, $\gamma = 1$, aber drehen wir an der Stärke der Wechselwirkungen durch $\delta \neq 1$, dann ist immer noch $z(t\beta^{-1})$ eine Lösung, nur diesmal mit $\beta^{-1} = \sqrt{\delta}$; eine stärkere Wechselwirkung $\delta > 1$ macht jetzt die Bewegung schneller!

Ist es auch möglich, die Größe der Trajektorien zu ändern, ohne deren Form zu beeinflussen? Zumindest bei homogenen Potenzialen können wir darüber etwas aussagen, weil dann $\nabla U(\alpha z(s)) = \alpha^{k-1} \nabla U(z(s))$ und deshalb

$$\frac{\alpha^{2-k}\gamma}{\delta\beta^2} \frac{d^2}{ds^2}(m \odot z)(s) + \nabla U(z(s)) = 0. \quad (73)$$

Hierdurch erhalten wir insbesondere auch dann neue Lösungen aus $z(t)$, wenn wir das ursprüngliche Problem unverändert lassen, $\delta = \gamma = 1$. Eine Schaar von neuen Lösungen ist nämlich immer dann gegeben,

wenn $\alpha^{2-k} = \beta^2$. Verändern wir also die Größe der Trajektorien um α , dann ist $\alpha z(t\alpha^{k/2-1})$ immer auch eine Lösung!

Beispielsweise hat ein harmonischer Oszillator $k = 2$. Haben wir also eine oszillierende Lösung, dann wissen wir jetzt, dass $\alpha z(t)$ auch eine sein muss; α verändert hier die Schwingungsamplitude aber nicht die Dauer, so dass die Schwingungsdauer einer Oszillation nicht von der Amplitude abhängig ist.

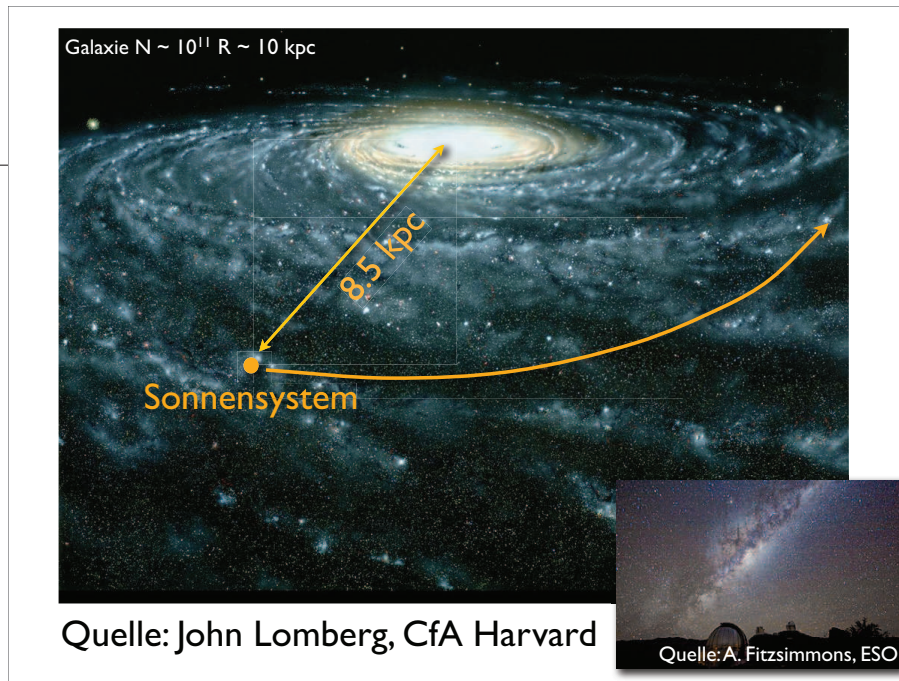
Über allgemeine Lösungen gravitativ wechselwirkender Teilchen, $k = -1$, hingegen lernen wir, dass zu jeder Lösung $z(t)$ auch $\alpha z(t\alpha^{-3/2})$ eine sein muss. Ist also eine Ellipse $r(t)$ eines Teilchens eine Lösung des Kepler-Problems, dann ist auch die um $\alpha > 1$ größere Ellipse eine mögliche Lösung, wenngleich mit einer Umlaufdauer, die um $\alpha^{3/2}$ grösser ist. Dies erinnert uns an das dritte Keplersche Gesetz, demzufolge $T^2/a^3 = \text{konst.}$ oder $T \propto a^{3/2}$, wenn a die große Halbachse einer Bahnellipse ist. Bemerkenswert ist, dass diese allgemeinere Relation für *alle* Lösungen des Kepler-Problems gilt, nicht nur für die geschlossenen elliptischen Bahnen (s.u.).

Anmerkung Auch bemerkenswert ist, dass $\alpha z(t\alpha^{-3/2})$ eine Skalierungsrelation für *alle* Bahnen gravitativer Wechselwirkungen von Punktteilchen ist. Auch wenn diese Bahnen weder elliptisch noch geschlossen oder nicht mal analytisch berechenbar sind! Haben wir also einen Kugelsternhaufen mit vielleicht 10^5 gravitativ wechselwirkenden Sternen, dann erhalten wir einen doppelt so großen Haufen (mit $2^3 = 8$ mal kleinerer Sterndichte), $\alpha = 2$, mit ansonsten exakt den gleichen Trajektorien, wenn wir gleichzeitig die Geschwindigkeiten aller Sterne um den Faktor $\alpha^{3/2}/\alpha = \sqrt{\alpha} = \sqrt{2}$ verringern. (Die Bahnlänge verändert sich um den Faktor α ; die Zeit, in der ein Bahnstück durchreist wird, um $\alpha^{3/2}$.)

Dies zeigt uns außerdem, dass ein gravitativ gebundenes System im Gleichgewicht eine größere Ausdehnung einnimmt, wenn wir die Geschwindigkeiten der Teilchen verkleinern. Dies ergibt sich auch aus dem Virialsatz, demzufolge $2\bar{T} + \overline{U(z)} = 0$ gilt: Ist \bar{T} größer, dann muss $\overline{U(z)}$ kleiner werden. Ein kleineres, negativeres $\overline{U(z)}$ entspricht aber stärker gebundenen Teilchen, was nur dadurch erreicht wird, dass die mittleren Abstände $|r_i - r_j|$ kleiner werden; das System nimmt weniger Raum ein.

Auch Gase sind Vielteilchensysteme, wenngleich mit einer völlig andersartigen Wechselwirkung: Die elektrische Kraft wirkt abstoßend, wenn der Abstand zwischen den Molekülen sehr klein wird. Bei große-

ren Abständen hingegen können sich die Moleküle relativ frei mit geringer Anziehung bewegen (Lennard-Jones-Potenzial). Gase verhalten sich deshalb genau gegensätzlich zu einem Kugelsternhaufen. Erhöhen wir die Geschwindigkeiten der Moleküle, also deren kinetische Energie oder die *Temperatur* des Gases, dann tendiert das Gas dazu, sich stärker auszudehnen, weil der Druck ansteigt. Man muss also vorsichtig sein, wenn man Parallelen zieht zwischen einem gravitativ gebundenen Vielteilchensystem und einem Gas!



Literatur

- [1] J. Honerkamp and H. Römer. *Klassische Theoretische Physik: Eine Einführung*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2012.
- [2] F. Kuypers. *Klassische Mechanik: mit über 300 Beispielen und Aufgaben mit Lösungen*. Lehrbuch Physik. John Wiley & Sons, Limited, 2008.
- [3] Peter Schneider. *Einführung in die Extragalaktische Astronomie und Kosmologie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

