universitätbonn

Rheinische
Friedrich-Wilhelms-
Universität Bonn

Klassische Theoretische Physik: Mechanik

Patrick Simon

Argelander-Institut für Astronomie

Auf dem Hügel 71

psimon@astro.uni-bonn.de

21. November 2013

1 Einkörperproblem

1.1 Arbeit

Wir können die Wirkung der Kraftkurve $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t), t)$ auf einen Körper auch so verstehen, dass diese physikalisch die Arbeit $\mathrm{d}W = \langle \boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \rangle$ an dem Körper verrichtet. Deshalb:

Definition. *Wir bezeichnen* $\mathrm{d}W = \langle \boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \rangle$ *als die Arbeit, die an einem Körper geleistet wird, um diesen um* $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ *im Kraftfeld zu verschieben. Unter der Leistung* P *verstehen wir die Arbeit, die pro Zeiteinheit* $\mathrm{d}t$ *geleistet wird, also* $P = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t = \langle \boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \rangle/\mathrm{d}t = \langle \boldsymbol{F}, \dot{\boldsymbol{r}} \rangle = \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v} \rangle$.

Bei einer gleichförmigen Bewegung wird wegen $\boldsymbol{F} = 0$ keine Arbeit am Körper verrichtet, $\mathrm{d}W = 0$. Es wird aber auch keine Arbeit geleistet, wenn eine nicht-verschwindende Kraft senkrecht zur Bewegung $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$ steht, weil auch dann $\mathrm{d}W = 0$. Folglich kann nur dann Arbeit an einem Körper geleistet werden, wenn eine Kraft *in Richtung der Bewegung* wirkt und so den Betrag der Geschwindigkeit verändert. Anders ausgedrückt: Kräfte können wirken, ohne notwendigerweise Arbeit zu leisten. An einem Körper, der sich mit konstantem $|\boldsymbol{v}|$ auf einer Kreisbahn bewegt, wird demnach physikalisch keine Arbeit geleistet. Die Arbeit hat ein positives Vorzeichen, wenn die Kraft in Richtung der Bewegung $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ wirkt und vice versa.

Wir betrachten erstmal nur Kraftfelder $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, die ausschließlich vom Ort $\boldsymbol{x}$ abhängen. Was ist die gesamte Arbeit $W(t_0, t_1)$, die ein Körper erfährt, wenn sich dieser auf einer Kurve $\boldsymbol{r}(t)$ von $\boldsymbol{r}(t_0) =: \boldsymbol{r}_0$ nach $\boldsymbol{r}(t_1) =: \boldsymbol{r}_1$ bewegt? Die Antwort erhalten wir, in dem wir alle infinitisimalen Arbeitsschritte $\mathrm{d}W(t)$ zu den Zeitpunkten t entlang der Trajektorie aufaddieren, oder durch das Integral

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}W(t) = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, P(t) = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)), \dot{\boldsymbol{r}}(t) \rangle =: \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}), \mathrm{d}\boldsymbol{r} \rangle\,. \tag{1}$$

Dieser Ausdruck ist mathematisch ein *Wegintegral* entlang der Trajektorie $\boldsymbol{r}(t)$, die mit dem Zeitparameter t parametrisiert wird; zum Zeitpunkt t wirkt die Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))$.

Man kann zeigen, dass das Ergebnis $W(t_0, t_1)$ unabhängig von der Wahl der Parametrisierung der Kurve $\boldsymbol{r}(t)$ ist. Wir könnten also eine neue (stetig und differenzierbare) Parametrisierung $\sigma(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

der Bahnkurve mit $\boldsymbol{r}(\sigma_0) = \boldsymbol{r}(t_0)$ und $\boldsymbol{r}(\sigma_1) = \boldsymbol{r}(t_1)$ einführen und würden exakt den gleichen Wert für $W(\sigma_0, \sigma_1)$ erhalten.

1.2 Kinetische Energie

Es gibt nun zwei Perspektiven, von denen aus wir dieses Wegintegral betrachten können. Einmal sagt uns das 1. Axiom, dass der Kraft $\boldsymbol{F}$ eine Beschleunigung $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m$ entsprechen muss, also

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, m\langle \boldsymbol{a}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t)\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, m\langle \ddot{\boldsymbol{r}}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t)\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, \frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \dot{\boldsymbol{r}}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t)\rangle = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}(t_1)|^2 - \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}(t_0)|^2 \ . \tag{2}$$

Definition. *Wir bezeichnen*

$$T = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2 \tag{3}$$

als die kinetische Energie eines Körpers der Masse m und der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$.

Also entspricht der Arbeit an einem Körper einer Änderung seiner kinetischen Energie,

$$W(t_0, t_1) = T(t_1) - T(t_0) \ . \tag{4}$$

Die kinetische Energie wächst an, wenn die Kraft in Richtung der Bewegung wirkt, weil $\mathrm{d}T = \langle \boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{r}\rangle$, und ist negativ im umgekehrten Fall. Deswegen wird die kinetische Energie eines Steins, der nach unten fällt, entlang der Trajektorie anwachsen.

1.3 Potenzielle Energie

Die Einführung von T hat keine Einzelheiten über das Kraftfeld benötigt. Das bringt uns zur zweiten Perspektive. Stellen wir uns eine geschlossene Trajektorie vor, die den Körper von $\boldsymbol{r}_0$ nach $\boldsymbol{r}_1$ bringt und dann von $\boldsymbol{r}_1$ wieder nach $\boldsymbol{r}_2 := \boldsymbol{r}(t_2) = \boldsymbol{r}_0$. Die gesamte geleistete Arbeit ist in diesem Fall:

$$W(t_0, t_1) + W(t_1, t_2) = W(t_0, t_2) = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_2} \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}), \mathrm{d}\boldsymbol{r}\rangle \ . \tag{5}$$

Basierend auf Gl. (5) definiert man sich eine spezielle Klasse von Kraftfeldern.

Definition. *Man bezeichnet Kraftfelder als konservativ, wenn die Integration über einen beliebigen geschlossenen Weg*

$$\oint \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}), \mathrm{d}\boldsymbol{r} \rangle = 0 \tag{6}$$

ergibt.

Die Bezeichnung "konservativ" erklärt sich dadurch, dass hiermit eine Erhaltungsgrösse entlang der geschlossenen Trajektorie verbunden ist. Kehren wir also nach einer *beliebigen* Rundreise durch ein konservatives Kraftfeld zum ursprünglichen Ausgangspunkt $\boldsymbol{r}_0$ zurück, dann wurde durch das Kraftfeld in der Summe keine Arbeit an dem Körper geleistet. Aus diesem Grund ist

$$W(t_0, t_1) = -W(t_1, t_2) \; . \tag{7}$$

Wir können deshalb jedem Raumpunkt eine skalare Größe zuordnen, die wir als *potenzielle Energie* bezeichnen. Diese ist bei $\boldsymbol{r}$ die Arbeit, die das Feld verrichtet, um den Körper von einem Referenzpunkt $\boldsymbol{r}_0$ nach $\boldsymbol{r}$ zu bewegen. Weil dies wegunabhängig ist, ist diese wohldefiniert.

Definition. *Für ein gegebenes konservatives Kraftfeld* $\boldsymbol{F}$ *bezeichnen wir*

$$U(\boldsymbol{r}_1) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}'), \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \rangle = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_0} \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}'), \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \rangle \tag{8}$$

als potenzielle Energie des Kraftfeldes $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ *bei* $\boldsymbol{r}_1$ *bezüglich des Referenzpunktes* $\boldsymbol{r}_0$.

Die Differenz $U(\boldsymbol{r}_2) - U(\boldsymbol{r}_1)$ sagt uns, wieviel Arbeit verrichtet wird, wenn wir den Körper von $\boldsymbol{r}_1$ nach $\boldsymbol{r}_2$ transportieren. Diese Differenz ist die einzige hier physikalisch relevante Größe, weshalb auch die Wahl der Referenzpunktes unerheblich ist; Differenzen von $U(\boldsymbol{r})$ sind unabhängig von $\boldsymbol{r}_0$. Das negative Vorzeichen für U wird hier gewählt, um sicherzustellen, dass die potenzielle Energie *zunimmt*, wenn die Kraft *entgegen* der Bewegungsrichtung wirkt.

1.4 Gesamtenergie

Vergleichen wir nun Gl. (4) und (8), dann finden wir

$$T(t_1) - T(t_0) = U(\boldsymbol{r}(t_0)) - U(\boldsymbol{r}(t_1)) \tag{9}$$

oder einfach den Erhaltungssatz der *Gesamtenergie*

$$\frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|^2 + U(\boldsymbol{r}(t)) = E = \text{konst.} \tag{10}$$

E bleibt also entlang der Trajektorie in einem konservativen Kraftfeld erhalten. Alle bekannten physikalischen Grundkräfte auf mikroskopischer (atomarer) Ebene sind konservativ. Makroskopische Phänomene wie Reibung können allerdings nicht-konservativ sein. Reibungskräfte sind geschwindigkeitsabhängig und wirken entgegen der Bewegungsrichtung.

1.5 Gradientdarstellung konservativer Kraftfelder

Wir wissen nun, wie das Potenzial $U(\boldsymbol{r})$ von $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ abhängt. Aber wie bekommt man die konservative Kraft aus einem gegebenen Potenzial?

Hierführ sehen wir uns nochmal die Definition der potenziellen Energie an,

$$U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}'), \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \rangle \ . \tag{11}$$

Mit einer beliebigen Parametrisierung $\boldsymbol{r}'(\sigma)$ mit $\boldsymbol{r}'(0) = \boldsymbol{r}_0$ und $\boldsymbol{r}'(\sigma_1) = \boldsymbol{r}$, lautet dieses Wegintegral

$$U(\boldsymbol{r}(\sigma_1)) = -\int_0^{\sigma_1} \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}'(\sigma)), \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} \rangle \mathrm{d}\sigma \ . \tag{12}$$

Dies bedeutet aber, dass (Ableitung entlang der Kurve)

$$\frac{\mathrm{d}U(\boldsymbol{r}(\sigma))}{\mathrm{d}\sigma} = \langle \nabla U(\boldsymbol{r}(\sigma)), \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} \rangle = -\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(\sigma)), \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} \rangle \tag{13}$$

oder dass

$$\langle \nabla U(\boldsymbol{r}(\sigma)) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(\sigma)), \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} \rangle = 0 \ . \tag{14}$$

Zusätzlich wissen wir, dass dies für *alle Wege* $\boldsymbol{r}(\sigma)$ gelten muss, die die Orte $\boldsymbol{r}_0$ und $\boldsymbol{r}$ verbinden, d.h. dies gilt für *beliebige* infinitisimale Wegstücke $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,

$$\langle \nabla U(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}), \mathrm{d}\boldsymbol{r} \rangle = 0 \ . \tag{15}$$

Die obige Gleichung ist dann aber nur erfüllbar, wenn

$$\nabla U(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0 \iff \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U(\boldsymbol{r}) \ . \tag{16}$$

Das konservative Kraftfeld ist das Gradientenfeld des Potenzials $U(\boldsymbol{r})$.

Zusätzlich finden wir noch als Bedingung eines konservatives Kraftfeldes

$$\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla \times \nabla U(\boldsymbol{r}) = 0 \ , \tag{17}$$

weil Gradientenfeldes rotationsfrei ist.

Die Operation $\nabla\times\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$ ist die *Rotation* des Vektorfeldes $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$. In einer kartesischen Basis $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ mit $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{e}_x + F_y\boldsymbol{e}_y + F_z\boldsymbol{e}_z$ ist dieser

$$\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (F_x\boldsymbol{e}_x + F_y\boldsymbol{e}_y + F_z\boldsymbol{e}_z) \ ; \tag{18}$$

die Basisvektoren $\boldsymbol{e}_i$ sind hier nicht ortsabhängig, wohingegen es die Koordinaten F_i der Kraft i.A. sind. Die Rotationsfreiheit eines Gradientenfeldes $\boldsymbol{F}$ folgt durch die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen.

Anmerkung Man betrachtet in diesem Zusammenhang auch zeitabhängige Felder $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t)$. In diesem Fall bezeichnet man $\boldsymbol{F}$ dann als konservativ, wenn $\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t) = 0$ für alle Zeitpunkte t. Dies bedeutet aber, dass die Arbeit entlang eines geschlossenen Weges i.A. nur dann verschwindet, wenn das Kraftfeld für die Dauer der Bewegung entlang des Weges konstant auf $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t), t_0)$ gehalten wird (die Bewegung entlang der geschlossenen Kurve ist *virtuell*). Die tatsächliche Arbeit $W(t_0, t_1) + W(t_1, t_2)$ durch das zeitveränderliche Feld kann aber von Null verschieden sein! Dennoch erhält man eine Potenzialdarstellung der Art $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t) = -\nabla U(\boldsymbol{r}, t)$.

Reibungskräften lassen sich keine konservativen Kraftfelder zuordnen: Die Arbeit, die geleistet werden muss, um entlang eines Weges zum Ausgangspunkt zurückzukehren, hängt von der Weglänge und der Ge-schwindigkeit des Körpers entlang des Weges ab. Normalerweise kann man aber die Bewegung eines Körpers unter Berücksichtigung der Reibung durch Kombination von konservativen Kraftfeldern in und nicht-konservativen Reibungskräften beschreiben. In diesem Fall ist also die Gesamtenergie des Körpers nicht erhalten.

Dennoch wird das Prinzip der Energieerhaltung auf mikroskopischer Ebene nicht verletzt, weil die Reibung die reibenden Moleküle in (thermische) Bewegung versetzt. Berücksichtigt man deren Bewegung oder Wärme in der Energiebilanz erhält man ein allgemeineres Prinzip der Energieerhaltung. Dies ist also konzeptionell ein Vielteilchenproblem, das wir später besprechen werden.

Dies bedeutet wiederum nicht, dass es keine konservativen Kräfte gibt, die von der Geschwindigkeit abhängen, also $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$. Beispielsweise greift die Lorentz-Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}) = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$, die von einer magnetischen Flussdichte $\boldsymbol{B}$ auf ein geladenes Teilchen der elektrischen Ladung q ausgeübt wird, immer senkrecht zur Bewegungsrichtung an, d.h. $P = \langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{v}\rangle = \langle q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B},\boldsymbol{v}\rangle = 0$. Deshalb wird bei der Bewegung durch ein Magnetfeld *keine* Arbeit verrichtet: Die Arbeit entlang eines geschlossenen Weges ist trivialerweise immer null! Allerdings ist wegen der Geschwindigkeitsabhängigkeit die Beziehung zwischen einem Potenzial $U(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$ und der Kraft nun allgemeiner gegeben durch

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}) = -\nabla U(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\nabla_{\boldsymbol{v}} U(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})\Big)\;; \tag{19}$$

der Operator $\nabla_{\boldsymbol{v}}$ bezeichnet den Gradienten bezüglich der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ die totale zeitliche Ableitung entlang der Trajektorie $\boldsymbol{r}(t)$. Diese Beziehung ergibt sich aus den Maxwellgleichungen und wird im Detail später in der Theoretischen Elektrodynamik hergeleitet. Wir möchten hier nur noch erwähnen, dass das Potenzial der Lorentz-Kraft durch $U(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}) = -q\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{A}\rangle$ gegeben ist. Das Vektorpotenzial der magnetischen Flussdichte ist durch $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ definiert.

1.6 Das Newtonsche Gravitationsgesetz

Nach Isaac Newton ist die Gravitationskraft (Zentralkraft)konservativ mit dem Potenzial

$$U(\boldsymbol{r}) = -\frac{Gm_1m_2}{r}\;, \tag{20}$$

wobei m_1 und m_2 die Massen der gravitativ wechselwirkenden Körper sind und $r := |\boldsymbol{r}|$ deren Abstand; $G = 6.67384\times10^{-11}\,\mathrm{m^3/kg/s^2}$ ist die Gravitationskonstante, die die Stärke der gravitativen Wechselwirkung bestimmt.

Dass dieses tatsächlich die diskutierte Zentralkraft der Ellipsenbewegung ergibt, sieht man anhand

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U(\boldsymbol{r}) = -\frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}U(\boldsymbol{r}) = -Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{1}{r^2} = Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}\ . \tag{21}$$

Hier haben wir im Zwischenschritt die Darstellung des Gradienten in Kugelkoordinaten für den *eingeschränkten Fall* einer reinen r-Abhängigkeit benutzt:

$$\nabla f(r) = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r}\ . \tag{22}$$

1.7 Eindimensionale Bewegung

Die Erhaltung der Gesamtenergie können wir in besonderen Fällen verwenden, um die Bewegungsgleichung $\boldsymbol{r}(t)$ eines Körpers explizit als Integral anzugeben. Man bezeichnet ein solches System als *integrabel*. Beachte, dass wir damit nicht notwendigerweise meinen, wir können das Integral oder die Integrale analytisch lösen! Alleine der Umstand, Trajektorien eines oder mehrerer Teilchen als Integral(e) schreiben zu können, ist schon etwas besonders. Wir kommen darauf später nochmal zurück.

Systeme sind auf jeden Fall immer integrabel, wenn wir ein einziges Teilchen betrachten, dass sich nur entlang einer Richtung $\boldsymbol{e}_x$ bewegen kann. In diesem Fall kann die Kraft auch nur entlang $\boldsymbol{e}_x$ wirken, so dass wir diese *immer* als Gradient eines Potenzials $U(x)$ schreiben können, $\boldsymbol{F}(x) = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{e}_x$. Deswegen ist dieses Kraftfeld auch für diese eingeschränkte Bewegung immer konservativ.

Man denke hier z.B. an die Bewegung eines Steins im erdnahen Gravitationsfeld. Hier ist die wirkende Kraft ungefähr konstant, $\boldsymbol{F}(x) = -mg\boldsymbol{e}_x$, für einen senkrecht nach oben zeigenden Vektor $\boldsymbol{e}_x$. Das entsprechende Potenzial ist $U(x) = mgx$. Zwar ist die Trajektorie eines Teilchens in diesem Feld allgemein dreidimensional, aber wir können – wie schon besprochen – immer einen Beobachter finden, für den das Teilchen nur nach unten entlang $\boldsymbol{e}_x$ fällt. Das ist dann eine eindimensionale Bewegung!

Für eindimensionale Systeme mit einem Freiheitsgrad x gilt wegen der Energieerhaltung

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E\ . \tag{23}$$

oder

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U(x)}\ . \tag{24}$$

Die Geschwindigkeit $\dot{x}$ ist bis auf das Vorzeichen direkt durch den Ort x gegeben. Das positive Vorzeichen ist zu wählen, wenn sich das Teilchen gerade zu größeren x bewegt und vice versa. Außerdem kann ein Teilchen niemals Bereiche von x erreichen, bei denen $U(x) > E$ wird; hier wäre $\dot{x}^2 < 0$. Deshalb markieren die Punkte x_0 mit $U(x_0) = E$ entweder

- Ruhepunkte eines Teilchens, d.h. $\dot{x} = 0$ *und* $\ddot{x} = 0$, d.h. $\mathrm{d}U(x)/\mathrm{d}x = 0$,
- oder Umkehrpunkte, d.h. $\dot{x} = 0$ und $\ddot{x} \neq 0$, an denen das Teilchen seine Richtung ändern muss; hier ist dann das Vorzeichen von "±" zu wechseln. $U(x_0) = E$ kann kein Ruhepunkt sein, wenn der Gradient von $U(x)$ bei $x = x_0$ nicht verschwindet.

Wir wollen hier nun nur Fälle betrachten, für die die Bewegung nur in eine Richtung läuft, d.h. $\dot{x} \geq 0$ oder $\dot{x} \leq 0$. Wir definieren die Orientierung von $\boldsymbol{e}_x$ so, dass $\dot{x} \geq 0$. Dadurch ist

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{\dot{x}}{\sqrt{E-U(x)}} = 1 \tag{25}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}t\,\dot{x}}{\sqrt{E-U(x)}} = \int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t \tag{26}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-U(x)}} = t_1 - t_0\ . \tag{27}$$

Der letzte Schritt auf der linken Seite ist formal eine Variablentransformation $t \mapsto t(x)$, die man häufig etwas salopp durch $\mathrm{d}t\,\dot{x} = \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ mit entsprechender Änderung der Integralgrenzen notiert. Entsprechend dieser Notation sieht man deshalb häufig die praktischen Rechenschritte

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E-U(x)} \tag{28}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-U(x)}} = \mathrm{d}t \tag{29}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-U(x)}} = \int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t = t_1 - t_0\ , \tag{30}$$

die zum gleichen Ergebnis

$$t_1 = t_0 + \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-U(x)}} \tag{31}$$

führen. Durch Integration des Ausdrucks auf der rechten Seite erhalten wir $t(x)$, was durch Invertierung auf $x(t)$ führt.

Dieses Problem ist also prinzipiell als “einfaches” Integral und einer *Integrationskonstanten* E, der Gesamtenergie, darstellbar. Das mag zwar im konkreten Falle ein schwieriges mathematisches Problem oder sogar analytisch unlösbar sein, aber viele Probleme, die nicht eindimensional sind, erlauben nicht einmal diese Art der Darstellungen der Lösungen: Sie sind nicht integrabel.

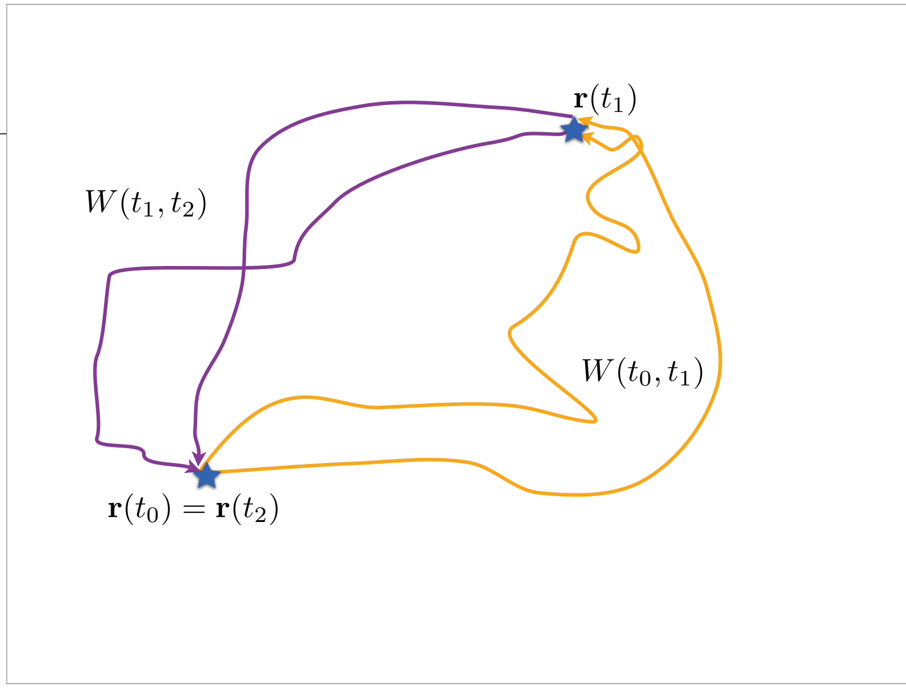
Zurück zu unserem ursprünglichen Beispiel. Wir betrachten die Phase, in der der Stein nach unten fällt, d.h. $\dot{x} < 0$. Wir finden für den fallenden Stein mit $t_0 \equiv 0$, $t_1 = t$, $x_1 = x$ und $x_0 \equiv 0$:

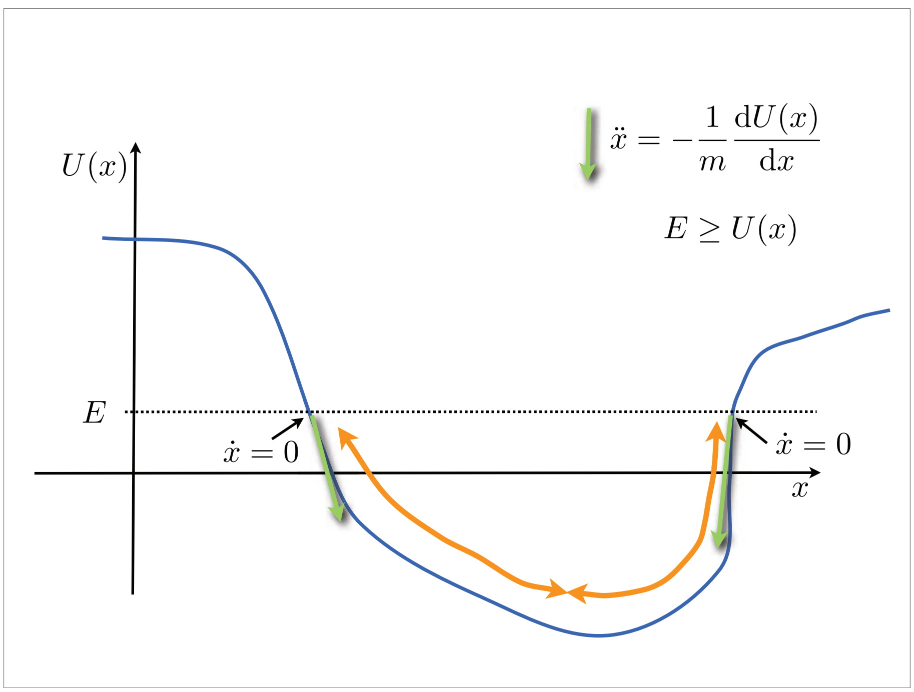
$$t = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{E/mg - x}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left(2\sqrt{E/mg - x}\right)\Big|_0^x = \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{E/mg - x} - \sqrt{E/mg}\right) \tag{32}$$

oder

$$x = -\frac{g}{2} t^2 - \sqrt{\frac{2E}{m}}\, t\ . \tag{33}$$

Das ist natürlich die Bewegungsgleichung einer konstanten Beschleunigung g mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2E/m}$.


$\mathbf{r}(t_1)$
$W(t_1, t_2)$
$W(t_0, t_1)$
$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(t_2)$


$\ddot{x} = -\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}$
$E \geq U(x)$
$U(x)$
E
$\dot{x} = 0$
$\dot{x} = 0$
x