Klassische Theoretische Physik: Mechanik

Patrick Simon

Argelander-Institut für Astronomie

Auf dem Hügel 71

psimon@astro.uni-bonn.de

21. November 2013

1 Axiome der Newtonschen Mechanik

1.1 Mathematische Beschreibung

Die Bühne der Newtonschen Mechanik ist ein dreidimensionaler affiner metrischer Raum E^3. Der Raum enthält Raumpunkte. Der Raum hat den Koordinatenursprung $\mathcal{O} \in E^3$. Der Verbindungslinie zweier Raumpunkte, einem Punktepaar, ist ein Vektor aus einem dreidimensionalen Vektorraum V^3 zugeordnet. “Differenzen” zweier Punkte aus E^3 sind also Elemente aus V^3. In E^3 werden die Position einer Punktmasse m oder eines Körpers mit vernachlässigbaren inneren Freiheitsgraden durch einen Ort $P \in E^3$ angegeben, der durch den *Ortsvektor* $\boldsymbol{r} \in V^3$ mit $\mathcal{O}$ verbunden ist; $\boldsymbol{r}$ ist der Abstandsvektor vom Koordinatenursprung. Wir nennen $\boldsymbol{r}$ einfach den Ortsvektor relativ zu $\mathcal{O}$.

Eine Bewegung einer Punktmasse wird durch einen zeitabhängigen Ortsvektor $\boldsymbol{r}(t)$ mit Zeitparameter t gegeben. Dies definiert eine *Bahnkurve oder Trajektorie* der Punktmasse, die durch die (stetige) Abbildung $\boldsymbol{r}(t) : \mathbb{R} \to V^3$ gegeben ist.

Definition. *Unter der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t)$ und Beschleunigung $\boldsymbol{a}(t)$ des Körpers verstehen wir die ersten zeitlichen Ableitungen der Trajektorie $\boldsymbol{r}(t)$,*

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}(t) := \dot{\boldsymbol{r}}(t)\;;\;\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}(t) := \ddot{\boldsymbol{r}}(t)\;. \tag{1}$$

Für jeden Zeitpunkt t erhalten wir also einen Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor am entsprechenden Punkt $\boldsymbol{r}(t)$ der Kurve. Aus Bequemlichkeit notieren wir diese (totalen) zeitlichen Ableitungen mit $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ für eine zeitliche Ableitung und mit $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$ für zwei zeitliche Ableitungen.

Unser Vektorraum V^3 ist ein metrischer Raum. Längen und Winkel von Vektoren messen wir mittels des Skalarprodukts $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle : V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$. Das Skalarprodukt hat die Eigenschaften

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle\;, \tag{2}$$

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle\;, \tag{3}$$

$$\langle \boldsymbol{a}, s\boldsymbol{b} \rangle = \langle s\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle\;, \tag{4}$$

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle^{1/2} =: |\boldsymbol{a}| \geq 0\;;\; |\boldsymbol{a}| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = 0\;. \tag{5}$$

Der Winkel α, der durch die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannt wird, ist definiert durch $\cos\alpha = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle/(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)$. Folglich sind zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ mit $|\boldsymbol{a}|, |\boldsymbol{b}| > 0$ senkrecht oder orthogonal zueinander, wenn $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = 0$, weil dann $\cos\alpha = 0$. Außer des Nullvektors 0 läßt sich jeder Vektor $\boldsymbol{a}$ auf die Einheitslänge $|\boldsymbol{e}| = 1$ durch $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ normieren. Anschaulich ergibt $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{a}\rangle$ die Länge des auf $\boldsymbol{e}$ projizierten Vektors $\boldsymbol{a}$, da $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{a}\rangle = \cos\alpha|\boldsymbol{a}|$.

Desweiteren definieren wir ein Vektorprodukt $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} : V^3\times V^3 \to V^3$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\ , && (6)\\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\ , && (7)\\ \boldsymbol{b}\times(s\boldsymbol{a}) &= (s\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}\ . && (8) \end{aligned}$$

Auch das Vektorprodukt hat eine anschauliche Interpretation: Der Betrag $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\alpha$ entspricht der Fläche der Parallelogramms, das von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannt wird. Dies entspricht deshalb auch der doppelten Fläche des Dreiecks, das durch die Ortspunkte $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathcal{O}\}$ definiert wird. Die Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ entspricht der Flächennormalen der Fläche, in der sich dieses Dreieck befindet.

Aus den Eigenschaften des Skalarprodukts und des Vektorprodukts leitet man die folgenden drei Relationen ab

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{b}\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle - \boldsymbol{c}\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\ , && (9)\\ \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\rangle &= \det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\ , && (10)\\ |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 &= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - |\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|^2\ . && (11) \end{aligned}$$

Die erste dieser Relationen besagt ("BACCAB-Regel"; vgl. linke und rechte Seite der Gleichung), dass sich der Vektor des Tripleprodukts in der Ebene befinden muss, die durch $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ aufgespannt wird. Die zweite Relation ist das Volumen des Spats oder des Parallelepipeds, der durch die drei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ aufgespannt wird. Es gibt demnach geometrisch einen Zusammenhang zwischen dem Skalar- und dem Vektorprodukt. Die dritte Relation erhalten wir aus

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin\alpha^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos\alpha^2) = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos\alpha^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - |\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|^2\ . \quad (12)$$

Durch die Linearität des Skalar- und Vektorprodukts, erhalten wir desweiteren für zeitliche Ableitungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t)\rangle = \langle \dot{\boldsymbol{a}}(t), \boldsymbol{b}(t)\rangle + \langle \boldsymbol{a}(t), \dot{\boldsymbol{b}}(t)\rangle \;, \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}(t)\times \boldsymbol{b}(t)) = \dot{\boldsymbol{a}}(t)\times \boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{a}(t)\times \dot{\boldsymbol{b}}(t) \tag{14}$$

und insbesondere

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{a}(t)|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{a}(t)\rangle = 2\langle \dot{\boldsymbol{a}}(t), \boldsymbol{a}(t)\rangle \;. \tag{15}$$

Hieraus folgt durch Anwendung der Kettenregel noch eine andere wichtige allgemeine Relation, nämlich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{a}(t)| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\langle \boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{a}(t)\rangle} = \frac{1}{2\sqrt{\langle \boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{a}(t)\rangle}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{a}(t)|^2 = \frac{\langle \dot{\boldsymbol{a}}(t), \boldsymbol{a}(t)\rangle}{|\boldsymbol{a}(t)|} \;. \tag{16}$$

Die letzte Relation sagt uns, dass sich der Betrag von $\boldsymbol{a}(t)$ entlang der Trajektorie $\boldsymbol{a}(t)$ nicht ändert, falls die Änderung $\dot{\boldsymbol{a}}(t)$ senkrecht auf $\boldsymbol{a}(t)$ steht.

Bezeichnet $G(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t)$ den Wert einer Funktion beim Ort $\boldsymbol{r}$ und für eine Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}$, dann ist (Kettenregel)

$$\frac{\mathrm{d}G(\boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t), t)}{\mathrm{d}t} = \dot{G}(\boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t), t) \tag{17}$$

$$= \langle \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{r}}, \dot{\boldsymbol{r}}(t)\rangle + \langle \frac{\partial G}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}, \ddot{\boldsymbol{r}}(t)\rangle + \frac{\partial G}{\partial t} \tag{18}$$

$$= \langle \nabla G, \dot{\boldsymbol{r}}(t)\rangle + \langle \nabla_{\dot{\boldsymbol{r}}} G, \ddot{\boldsymbol{r}}(t)\rangle + \frac{\partial G}{\partial t} \tag{19}$$

die zeitliche Änderung vom Wert G *entlang der Kurve* $\boldsymbol{r}(t)$. Die partiellen Ableitungen von G werden an der Stelle $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ und $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}(t)$ ausgewertet. Man notiert hier mit $\langle \nabla G, \mathrm{d}\boldsymbol{r}\rangle$ die Änderung $\mathrm{d}G$ von G in Richtung $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ unter der Voraussetzung, dass $\dot{\boldsymbol{r}}$ und t konstant sind. Ebenso ist $\langle \nabla_{\dot{\boldsymbol{r}}} G, \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}\rangle$ die Änderung $\mathrm{d}G$ entlang $\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}$ unter der Voraussetzung, dass $\boldsymbol{r}$ und t konstant sind.

Üblicherweise sucht man sich ein Koordinatensystem mit einer Basis $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ und $\boldsymbol{e}_i \in V^3$, um die Ableitungen mit “Nabla” ∇ in einem konkreten Problem zu berechnen. Dadurch erhält man eine *Koordinatendarstellung* des Operators. Beachte, dass die Basisvektoren auch vom Ort $\boldsymbol{r}$ abhängen dürfen. Für ein Kartesisches, ortsunabhängiges Koordinatensystem $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ finden wir:

$$\nabla G = \frac{\partial}{\partial x}(G\boldsymbol{e}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(G\boldsymbol{e}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(G\boldsymbol{e}_z) = \frac{\partial G}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial G}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial G}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \;; \tag{20}$$

$$\nabla_{\dot{\boldsymbol{r}}} G = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(G\boldsymbol{e}_x) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}}(G\boldsymbol{e}_y) + \frac{\partial}{\partial \dot{z}}(G\boldsymbol{e}_z) = \frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial G}{\partial \dot{y}}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial G}{\partial \dot{z}}\boldsymbol{e}_z \;. \tag{21}$$

Für eine Serie von algebraischen Opertationen benötigt man aber keine Koordinatendarstellung. Man kann allgemeingültig für jedes Koordinatensystem rechnen (koordinatenfrei), durch Rechenregeln wie die Produktregel

$$\nabla(GH) = H\,\nabla G + G\,\nabla H\ . \tag{22}$$

1.2 1. Axiom: kraftfreie Bewegung

Der letzte Abschnitt listet die mathematische Struktur des Raumes auf, auf der die Newtonsche Mechanik abgebildet wird. Diese Struktur bildet im Wesentlichen unsere Alltagserfahrung mit geometrischen Objekten ab (relative Lage, Winkel, Abstände). Tatsächlich ist diese algebraische Formalisierung ein eleganter Kunstgriff, der geometrische Argumente auf eine algebraische Struktur mit klaren Rechenregeln überträgt. Diese Darstellung ist relativ neu und war z.B. zu Lebzeiten von Isaac Newton (*1643-†1727) in dieser Fülle noch nicht bekannt. Deshalb sind viele Beweisgänge in Newton's bahnbrechender Arbeit Philosophiae Naturalis Principia Mathematica rein geometrische Argumente, die explizit durch Skizzen geometrisch vorgeführt werden. Die Entwicklung der modernen Mathematik als Sprache der Physik hat uns das Leben in dieser Hinsicht enorm leichter gemacht.

Bisher wurde jedoch noch nichts über die Modellierung physikalischer Gesetze in unserer Darstellung gesagt. Wie z.B. eigentlich die Trajektorien $\boldsymbol{r}(t)$ der Punktmassen bestimmt werden. Ein entscheidender Fortschritt in dieser Hinsicht wurde von Newton dadurch erzielt, dass er, basierend auf der Arbeit von Galileo Galilei (*1564-†1642), eine Kraft nach ihrer Wirkung auf den Bewegungszustand einer Punktmasse definierte. Unter dem Bewegungszustand versteht man den

Definition. *Impuls eines Körpers,*

$$\boldsymbol{p}(t) = m\boldsymbol{v}(t)\ . \tag{23}$$

Man betrachtet nun einen sehr speziellen Bewegungszustand eines Körpers.

Definition. *Unter einer gleichförmigen Bewegung eines Körper entlang einer Trajektorie versteht man*

$$\boldsymbol{a}(t) = 0\ \ ;\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}(t) = 0\ . \tag{24}$$

Beachte, dass wir hier davon ausgehen, dass die Masse m der Punktmasse eine Konstante ist, d.h. $\dot{m} = 0$.

Diesen speziellen Zustand benutzt Newton, um die Abwesenheit einer Kraft zu beschreiben (1. Axiom).

1. Axiom. *Wirkt keine (resultierende) Kraft auf einen Körper, dann ist seine Bewegung gleichförmig, d.h. $\dot{\boldsymbol{p}}(t) = 0$, oder $\dot{\boldsymbol{v}}(t) = 0$, wenn m konstant ist.*

Zusätzlich beschränkt man diese Bedingung auf Kräfte, die von physikalischen Kraftquellen, etwa durch Wechselwirkung mit anderen Körpern stammen müssen. Umgekehrt muss eine (physikalische) Kraft am Werk sein, wenn sich der Bewegungszustand eines Körpers abweichend von $\dot{\boldsymbol{p}}(t)$ verändert.

Aus einer gleichförmigen Bewegung ergibt sich, dass sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0$ bewegen muss, oder dass die Bahn durch eine Gerade in E^3 gegeben ist, d.h.

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t\, \boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{v}_0 = \text{konst} \;;\; \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t\, \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{r}_0 + (t - t_0)\boldsymbol{v}_0 \,. \tag{25}$$

Unter dem Zeitpunkt t_0 verstehen wir einen willkürlichen Referenzzeitpunkt, zu dem die Position des Körpers $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(t_0)$ ist.

1.3 Inertialsysteme

Die Konstruktion unseres Raumes E^3 ist nicht eindeutig. Der Ursprung $\mathcal{O}$ des affinen Raumes kann etwa beliebig gewählt werden. Verschieben wir beispielsweise durch eine Ortstranslation den Ursprung von $\mathcal{O}$ nach $\mathcal{P}$ um den Vektor $\overline{\mathcal{O}\mathcal{P}} = \Delta\boldsymbol{r}$, dann verschieben sich die Ortsvektoren der Trajektorie nach $\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}(t) + \Delta\boldsymbol{r}$. Dies würde nun die Trajektorie für einen alternativen Beobachter repräsentieren, der sich die Bewegung des gleichen Körpers von einem anderen Beobachtungspunkt ansähe. Für diesen alternativen Beobachter wäre die gleichförmige Bewegung aber immer noch gleichförmig, weil

$$\boldsymbol{a}'(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{r}'(t) = 0 \tag{26}$$

aufgrund der Konstanz von $\Delta\boldsymbol{r}$.

Selbiges gilt, wenn wir die Orientierung des Beobachters verändern, indem wir die Trajektorie mit der Abbildung $\mathrm{D} : V^3 \to V^3$ rotieren, d.h. $\boldsymbol{r}'(t) = \mathrm{D}\boldsymbol{r}(t)$; D ist dadurch gegeben, dass es die Längen der Vektoren nicht verändert, $|\mathrm{D}\boldsymbol{r}(t)| = |\boldsymbol{r}(t)|$, und das diese nicht spiegelt. Dies sieht man wegen

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{r}'(t) = \mathrm{D}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{r}(t) = 0 \,, \tag{27}$$

aufgrund der Konstanz der Abbildung D.

Was passiert aber, wenn sich der alternative Beobachter B2 relativ zum ursprünglichen Beobachter B1 bewegt? Nehmen wir mal an, dass B2 die Orientierung von B1 beibehält, aber seinen Ursprung $\mathcal{O}$ permanent verschiebt. Damit meinen wir, dass die Translation mit $\Delta\boldsymbol{r}(t)$ zeitabhängig ist. B1 wurde sagen, dass B2 in Bewegung ist. Das gleiche würde natürlich B2 auch von B1 behaupten. Die gleichförmige Trajektorie einer Punktmasse, die B1 beobachtet, hätte aus Sicht von B2 nun die Beschleunigung

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{r}'(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Delta\boldsymbol{r}(t) \,. \tag{28}$$

Diese ist nur dann verschwindend Null, wenn exakt $\Delta\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = 0$, also die Verschiebung des Ursprungs linear in der Zeit ist,

$$\Delta\boldsymbol{r}(t) = (t - t_0)\Delta\boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{r}(t_0) \,; \tag{29}$$

$\Delta\boldsymbol{v}$ und $\Delta\boldsymbol{r}(t_0)$ sind hier konstant. Folglich kann das 1. Axiom nicht für alle Beobachter gültig sein!

Man definiert deshalb Beobachter-Bezugssysteme, in denen sich *alle* Punktmassen, auf die keine Kräfte anderer Körper wirken, gleichförmig bewegen als *Intertialsysteme*. Aus der obigen Argumentation geht hervor, dass diese Bezugssysteme eine Klasse von Beobachter bilden, deren beobachtete Trajektorien durch die

Definition. *Galilei-Transformation*

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}(t) + (t - t_0)\Delta\boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{r}(t_0) \tag{30}$$

mit einem *konstantem* $\Delta\boldsymbol{v}$ und $\Delta\boldsymbol{r}(t_0)$ ineinander überführt werden können. Der Einfachheit halber nehmen wir hier an, dass alle Inertialsysteme die gleiche Orientierung besitzen. Hierbei ist $\Delta\boldsymbol{v}$ die Relativgeschwindigkeit der Inertialsysteme. Folglich unterscheiden sich die Geschwindigkeiten der Trajektorien beobachtet in zwei Intertialsystemen höchstens um eine Konstante

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}'(t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{v}'(t) - \boldsymbol{v}(t) = \Delta\boldsymbol{v} \;, \tag{31}$$

also um deren Relativgeschwindigkeit.

Nochmal: Das 1. Axiom ist nur in einem Intertialsystem gültig. Ein Beobachter mit $\Delta\ddot{\boldsymbol{r}}(t) \neq 0$ relativ zu einem Intertialsystem wird im Allgemeinen keine gleichförmige Bewegung eines kräftefreien Punktteilchens beobachten! Wir werden dies später anhand von Beispielen illustrieren.

Anmerkung Wir haben hier stillschweigend angenommen, dass alle Bezugssysteme den gleichen Zeitparameter t – die “absolute Zeit” – verwenden können. Dies bedeutet, alle Beobachter verfügen über gleich schnell laufende Uhren, die problemlos synchronisiert werden können. Beobachtungen im 20. Jahrhundert haben aber gezeigt, dass sich Licht für *jeden* Beobachter, ob im Intertialsystem oder nicht, mit gleicher Geschwindigkeit c ausbreitet. Insbesondere erfüllen die Trajektorien von Lichtstrahlen in zwei Intertialsysteme mit Geschwindigkeitsdifferenz $\Delta\boldsymbol{v}$ überraschenderweise immer $|\boldsymbol{v}'(t)| = |\boldsymbol{v}(t)|$, im eklatanten Widerspruch zur Galileo-Transformation! Es stellte sich heraus, dass die Galileo-Transformation nur näherungsweise für nicht-relativistische Geschwindigkeiten $|\boldsymbol{v}| \ll c$ gültig ist. Der Widerspruch in der Beobachtung der Lichttrajektorien konnte nur durch eine Abhängigkeit der Zeitmessung vom Beobachter aufgehoben werden. Dies mündete schliesslich in die Formulierung der Speziellen Relativitätstheorie durch Albert Einstein (*1879-†1955), die wir in der Vorlesung später noch besprechen werden.

1.4 2. Axiom: Kraftdefinition

Das 1. Axiom beschreibt den Fingerabdruck einer wirkenden Kraft, ohne zu sagen, wie sich diese quantitativ auswirkt. Dieses Manko wird vom 2. Axiom behoben. Dieses beschreibt, wie sich eine Kraft auf ein Punktteilchen für einen Intertialsystem-Beobachter genau auswirkt:

2. Axiom. *Eine Kraft $\boldsymbol{F}(t)$ zum Zeitpunkt t ändert den Bewegungszustand eines Körpers durch*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}(t) = m\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{F}(t) \;. \tag{32}$$

Die Wirkung der Kraft ist eine Beschleunigung $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m$, die einen Körper von seiner gleichförmigen Bewegung abbringt. Da die Beschleunigung ein Vektor ist, muss also auch eine Kraft vektoriell sein. Desweiteren reagiert nicht jeder Körper mit der gleichen Beschleunigung auf die gleiche Kraft, wie man leicht im Labor überprüfen kann, z.B. mittels einer Feder und mehrerer Gewichte. Trägere Massen mit größerem m reagieren mit einer kleineren Beschleunigung und vice versa.

Empirisch findet man außerdem, dass sich Kräfte $\boldsymbol{F}_i$ verschiedener Quellen, die auf das gleiche Körper wirken, vektoriell addieren, d.h. man findet das zusätzliche

Definition. *Superpositionsprinzip von Kräften,*

$$m\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{F}(t) = \sum_{i=1}^{N_F} \boldsymbol{F}_i(t) \; . \tag{33}$$

Deshalb können sich verschiedene Kräfte auch ausgleichen und so in der Summe keinen Einfluss auf die gleichförmige Bewegung eines Körpers haben. Wir machen uns beispielsweise dieses Prinzip zu Nutze, um Kräfte auf ausgedehnte Körper zu betrachten. Hier wird der ausgedehnte Körper als Summe eines Kontinuums von Punktmassen beschrieben, die alle individuell betrachtet werden.

Natürlich wurde bis jetzt nichts über die Natur der Kräfte gesagt, die auf ein Körper wirken. Wir wissen nur, wie wir die Trajektorie zu verändern haben, wenn Kräfte auftreten. Die Details der Natur der Kräfte müssen im Rahmen einer physikalischen Theorie ausgearbeitet werden. Es ist dennoch plausibel anzunehmen, dass eine Kraft sich mit dem Ort eines Körpers und mit der Zeit t ändern wird, eventuell auch mit dessen Geschwindigkeit. Eine dynamische Beschreibung versucht deshalb die zeitliche Entwicklung des Ortes $\boldsymbol{r}(t)$ eines Körpers und die der Kräfte zusammen zu modellieren. Wir können dies formal als Differentialgleichung 2. Ordnung schreiben

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t), t) \; , \tag{34}$$

oder alternativ als Differentialgleichung 1. Ordnung des Zustandsvektor-Paars $(\dot{\boldsymbol{r}}(t), \boldsymbol{r}(t))^{\mathrm{T}}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{r}}(t) \\ \boldsymbol{r}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t), t)/m \\ \dot{\boldsymbol{r}}(t) \end{pmatrix} \; . \tag{35}$$

Die Kenntnis eines physikalischen Modells für $\boldsymbol{F}$ vorausgesetzt, bestimmt diese Differentialgleichung die Trajektorie $\boldsymbol{r}(t)$. Da dies eine Differentialgleichung 2. Ordnung ist, ist die Trajektorie durch den Anfangsort $\boldsymbol{r}(t_0)$ und der Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t_0) = \dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ eindeutig bestimmt (*Anfangswertproblem*). Eine Lösung läßt sich auch eindeutig durch zwei Orte $\boldsymbol{r}(t_1)$ und $\boldsymbol{r}(t_2)$ bei verschiedenen Zeitpunkten bestimmen, falls diese durch eine Lösung verbunden werden können (*Randwertproblem*).

Man bezeichnet $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t), t)$ als *Kraftkurve*. Dies ist die Kraft, die zu einem Zeitpunkt t auf die Punktmasse der Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ beim Ort $\boldsymbol{r}(t)$ wirkt. Die Kraftkurve definiert ein Vektorfeld entlang der Trajektorie $\boldsymbol{r}(t)$.

Häufig kann man ein *Kraftfeld* $\hat{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}, t)$ angeben. Dies definiert die Kraft auf einen Körper, wenn der sich an einem bestimmten Punkt $\boldsymbol{x}$ befinden *würde*. Ist das Kraftfeld die einzige Kraftquelle, dann ist die Kraftkurve durch $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t), t) = \hat{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r}(t), t)$ gegeben; mathematisch ist das die Hinteinanderschaltung der Abbildung $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$ und $\boldsymbol{r}(t)$. Üblicherweise kann man die Kraftkurve als Kombination eines Kraftfeldes und einer zusätzlichen Kraft wie etwa einer Reibungskraft $\boldsymbol{F} \propto -\boldsymbol{v}(t)|\boldsymbol{v}(t)|^n$ mit $n \in \{0, 1\}$ darstellen ($n =$ 0: Gleitreibung; $n = 1$: Luftreibung). Eine Haftreibung ist komplizierter, weil diese auch von der Kraft abhängt, mit der zwei Materialien zusammengedrückt werden.

Als einfaches Beispiel mit analytischer Lösung für $\boldsymbol{r}(t)$ betrachten wir eine konstante Kraft $\boldsymbol{F} =$ konst., die auf eine Punktmasse m wirken soll. Ein solcher Fall ist z.B. in etwa an der Erdoberfläche gegeben, wo eine konstante Gravitationskraft $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$ senkrecht zum Horizont auf alle Körper wirkt. Das 2. Axiom sagt uns, dass deshalb eine konstante Beschleunigung $|\boldsymbol{g}| \approx 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ auf die Punktmasse einwirkt. Die Trajektorie erhält man nun durch zweifache Integration von $m\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = m\boldsymbol{g}$ nach der Zeit,

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, \boldsymbol{g} = \boldsymbol{v}_0 + (t - t_0)\boldsymbol{g}\;; \tag{36}$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, \boldsymbol{v}(t') = \boldsymbol{r}_0 + (t - t_0)\boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\boldsymbol{g}\;. \tag{37}$$

Diese Trajektorie beschreibt eine Parabel mit $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(t_0)$ und $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}(t_0)$ als Integrationskonstanten, die sich aus den Anfangsbedingungen ergeben. Im zweiten Schritt haben wir die Integrationsvariable nach $s = t - t_0$ geändert. Besonders einfach wird die Form der Trajektorie, wenn wir in ein Intertialsystem mit $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0$ und $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ wechseln. Die Bewegungsgleichung ist nun $\boldsymbol{r}'(t) = \frac{1}{2}(t - t_0)^2\boldsymbol{g}$ (Kräfte sind invariant bezgl. der Galilei-Transformation); wir beobachten also nur eine Punktmasse die aus der Ruhe $\boldsymbol{v}'(t_0) = 0$ nach unten fällt. Für diesen neuen Beobachter B2 kommt die Parabelform, von der der andere Beobachters B1 berichtet, also nur dadurch zustande, dass sich B1 noch zusätzlich gleichförmig mit $-\Delta\boldsymbol{v}$ bewegt.

Anmerkung Kennen wir alle Positionen und Geschwindigkeiten aller Punktmassen zu einem Zeitpunkt t_0 und die Physik der Kräfte zu allen Zeiten t, dann könnten wir im Grunde die dynamische Entwicklung des Systems zu jedem Zeitpunkt in der Zukunft, $t > t_0$, vorhersagen oder rückwirkend für jedem Zeitpunkt $t < t_0$ in der Vergangenheit rekonstruieren. Die klassische Mechanik ist demnach deterministisch, so wie es durch den Laplacescher Dämon von Pierre-Simon Laplace (*1749-†1827) zum Ausdruck gebracht wurde.

Diese Betrachtungsweise musste im 20. Jahrhundert durch das Aufkommen der Quantenphysik aber revidiert werden. Hier sind einzelne Positionen und Geschwindigkeiten zufällig, aber dafür ist die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung, denen Positionen und Geschwindigkeiten folgen, deterministisch. Sollte die Streuung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Orten und Geschwindigkeiten klein sein, dann ist die klassische Beschreibung eine sehr gute Näherung. Dies ist in der makroskopischen Welt der Fall.

1.5 Kreisbewegungen

Die dynamische Beschreibung zielt also darauf ab, die Teilchentrajektorien aus Anfangsbedingungen und/oder Randwertbedingungen abzuleiten. Wir können das Problem aber auch umgekehrt betrachten. Falls wir die Trajektorie $\boldsymbol{r}(t)$ kennen, können wir fragen, welche Kraft notwendig ist, um ein Körper auf dieser Bahn zu halten. Das wollen wir nun mal anhand zweier Beispiele demonstrieren.

Nehmen wir erstmal an, wir beobachten eine Körper, der sich ausschliesslich auf einer Kreisbahn mit Radius R bewegt. Der Ursprung $\mathcal{O}$ sei o.B.d.A. im Mittelpunkt des Kreises, d.h. $|\boldsymbol{r}(t)| = R = \text{konst.}$ Offensichtlich findet die Bewegung auch nur in einer Ebene statt: der Kreisebene. Die Flächennormale dieser Bahnebene sei der Vektor $\boldsymbol{e}_z$. Es ist also immer $\langle \boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{r}(t) \rangle = 0$. Desweiteren sei der Vektor $\boldsymbol{e}_x =$

$\boldsymbol{r}(t_0)/R$ die Richtung des Körperortes zum Zeitpunkt t_0 und $\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x$ ein Einheitsvektor senkrecht zu $\boldsymbol{e}_z$ und $\boldsymbol{e}_x$. Hierdurch definieren wir ein orthonormales, zeitunabhängiges Koordinatensystem mit den Basisvektoren $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$. Dieses benutzen wir, um die Trajektorie $\boldsymbol{r}(t)$ mittels einer einzigen Variablen bzw. *Koordinate* $\theta(t)$ zu parametrisieren,

$$\boldsymbol{r}(t) = R\cos\theta(t)\boldsymbol{e}_x + R\sin\theta(t)\boldsymbol{e}_y =: \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{pmatrix} . \tag{38}$$

Dies beschreibt durch das zeitabhängige $\theta(t)$ jede *beliebige* Kreisbewegung mit Radius R (im Inertialsystem, in dem der Kreis in Ruhe ist). Der Vektor $\boldsymbol{e}_z$ taucht hier nicht mehr auf, weil sich der Ursprung $\mathcal{O}$ im Mittelpunkt des Kreises befindet. Um uns das Leben einfacher zu machen, schreiben wir den Ort $\boldsymbol{r}(t)$ auf der rechten Seite in Koordinatenschreibweise als 2×1-Matrix. Es ist einfach zu zeigen, dass sich diese Matrix wie ein Vektor aus $\mathbb{R}^2$ verhält, wenn wir Vektoren $\boldsymbol{r} \in V^3$ der Kreisebene addieren, subtrahieren oder mit Skalaren multiplizieren. Zusätzlich lassen wir im Folgenden das Zeitargument in $\theta(t)$ weg, behalten aber in Erinnerung, dass θ explizit zeitabhängig ist.

Wir fragen uns nun, welche Kraft bei $\boldsymbol{r}(t)$ dieser Bewegung entspricht. Nach dem 2. Axiom benötigen wir dafür die zweite Ableitung nach der Zeit von $\boldsymbol{r}(t)$, da $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$. Wir beginnen mit der ersten Ableitung,

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}(t) = R\dot{\theta}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ +\cos\theta \end{pmatrix} =: R\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta . \tag{39}$$

Wir haben hier einen neuen (zeitabhängigen) Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_\theta := -\sin\theta\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\boldsymbol{e}_y$ eingeführt. Dieser ist tangential zum Kreis bei $\boldsymbol{r}(t)$, wovon man sich durch $\langle \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{r}(t)\rangle = 0$ überzeugen kann. Offenbar ist die Geschwindigkeit des Körpers immer tangential zur Kreisbahn! Diesen Ausdruck leiten wir jetzt nochmals ab:

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}(t) = R\ddot{\theta}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ +\cos\theta \end{pmatrix} + R\dot{\theta}^2\begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} =: R\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\boldsymbol{e}_r =: a_\theta\boldsymbol{e}_\theta + a_r\boldsymbol{e}_r . \tag{40}$$

Nun ist $\boldsymbol{e}_r := \cos\theta\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\boldsymbol{e}_y$ ein Einheitsvektor, der vom Kreismittelpunkt in Richtung $\boldsymbol{r}(t)$ zeigt: der Radialvektor. So wie $\boldsymbol{e}_\theta$ ist $\boldsymbol{e}_r$ zeitabhaengig und läuft mit der Bewegung des Körpers mit. Die Vektoren $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z\}$ definieren eine zeitabhängige Basis: ein krummliniges Koordinatensystem.

Wir finden also i.A. zwei Komponenten der Beschleunigung. Eine Komponente $a_\theta = R\ddot{\theta}$ tangential zum Kreis und eine weitere Komponente $a_r = R\dot{\theta}^2$, die den Körper in Richtung des Zentrums beschleunigt. Die Komponente a_θ kann nur den Betrag der Bahngeschwindigkeit $|\boldsymbol{v}(t)| = |R\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta|$ verändern, weil diese in Richtung von $\boldsymbol{v}$ bzw. $\boldsymbol{e}_\theta$ wirkt. Die Komponente a_r ist senkrecht zu $\boldsymbol{v}(t)$, weshalb diese nur die Richtung aber *nicht* den Betrag von $\boldsymbol{v}(t)$ ändern kann. Erinnerung: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{v}| = \langle\dot{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{v}\rangle/|\boldsymbol{v}|$.

Definition. *Die Beschleunigung q_r entsprechend der Radialkraft*

$$F_r = mR\dot{\theta}^2 \tag{41}$$

nennt man die Zentripedalkraft.

Rotieren wir etwa einen Stein an einer Schnur mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\theta}$, dann muss die Schnur eine Kraft F_r auf den Stein ausüben, um diesen auf der Bahn zu halten.

Wir sehen uns nochmal kurz die Bahngeschwindigkeit in Gl. (39) $|\boldsymbol{v}(t)| = R\dot{\theta}(t)$ an. Wir wissen, dass sowohl $\boldsymbol{e}_\theta$ als auch $\boldsymbol{e}_r$ in der Ebene liegen, die senkrecht zur Bahnnormalen $\boldsymbol{e}_z$ ist. Ausserdem sind $\boldsymbol{e}_r$ und $\boldsymbol{e}_\theta$ senkrecht zueinander. Deshalb können wir wegen der Eigenschaften des Vektorprodukts $\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_r$ schreiben und

$$\boldsymbol{v}(t) = R\dot{\theta}(\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_r) = (\dot{\theta}\boldsymbol{e}_z) \times (R\boldsymbol{e}_r) =: \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{r}(t) \; , \tag{42}$$

wobei $\boldsymbol{\omega}(t) := \dot{\theta}(t)\boldsymbol{e}_z$ und $\boldsymbol{r}(t) = R\boldsymbol{e}_r$. Wir können also die Bahngeschwindigkeit einer kreisförmigen Trajektorie $\boldsymbol{v}(t)$ als Vektorprodukt der vektoriellen Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ und dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}(t)$ angeben. Diese Relation gilt auch noch, wenn wir den Ursprung senkrecht zur Bahnebene um $\Delta\boldsymbol{r}$ verschieben, da $\boldsymbol{\omega} \times \Delta\boldsymbol{r} = 0$. Aber nicht mehr bei Verschiebungen des Urpsrungs in der Bahnebene. Die Richtung von $\boldsymbol{\omega}$ definiert die Orientierung des Bahnebene, wohingegen der Betrag $\omega(t) = |\boldsymbol{\omega}(t)|$ die Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t ist.

Beachte, dass wir in der Schreibweise $\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{r}(t)$ kein Basissystem mehr brauchen, um die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t)$ zu beschreiben. Dieser Ausdruck ist *koordinatenfrei*. Zusätzlich können wir nun auch die Beschleunigung koordinatenfrei für die Kreisbahn angeben:

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{v}(t) = \underline{\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \boldsymbol{r}(t)} + \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{r}(t) \; . \tag{43}$$

Der erste Term auf der rechten Seite verschwindet, falls $\boldsymbol{\omega}$ konstant ist. Falls nicht, entspricht er aber nur einer Beschleunigung, die senkrecht zu $\boldsymbol{r}(t)$ oder $\boldsymbol{e}_r$ ist, da $\boldsymbol{r}(t)$ ein Faktor des Vektorprodukts ist. Diesem Term entspricht also die Beschleunigung in der zu $\boldsymbol{e}_r$ senkrechten Ebene, so dass dem anderen Term

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{r}(t) \tag{44}$$

die Zentripedalkraft in vektorieller, koordinatenfreier Form entsprechen muss.

Anmerkung Isaac Newton benutzte den Ausdruck der Zentripedalkraft $F_r = mR\dot{\theta}^2$, um das Gesetz der Gravitationskraft folgendermaßen zu raten [1]. Ihm war das dritte Keplersche Gesetz bekannt, demzufolge bei Planeten-Kreisbahnen ein Zusammenhang zwischen der Umlaufzeit T und dem Bahnradius R besteht: $R^3/T^2 = \text{konst.} =: \text{C}$. Außerdem wusste man wegen des zweiten Keplerschen Gesetzes, dass ein Planet auf der Kreisbahn sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta} = \omega$ bewegen muss. Da aber $\omega = 2\pi/T$ folgt $R^3\omega^2 = C/(2\pi)^2$ oder $R\omega^2 = C/(2\pi)^2/R^2$. Folglich muss ein solcher Planet mit der Zentripedalkraft $F_r = mC/(2\pi)^2/R^2 \propto 1/R^2$ angezogen werden. Da die Proportionalitätskonstante nicht vom Planeten im Sonnensystem abhängt, kann diese nicht von der Masse des Planeten abhängen. Die eigentliche Leistung Newtons bestand allerdings in diesem Zusammenhang darin, zu zeigen, dass die gleiche Kraft auch elliptische Bahnen erklärt (erstes Keplersche Gesetz) und dass diese *alle* (damals bekannten) gravitativ gebundenen Systeme beschreiben kann (z.B. das Erde-Mond System, die Jupiter-Monde, Erdanziehung an der Erdoberfläche, Kometen).

Abschließend sei noch erwähnt, dass nur ein Beobachter eine Kreisbahn für $\boldsymbol{F}$ wie in Gl. (44) beobachtet, wenn sich der Kreismittelpunkt in Ruhe befindet. Jedes andere Inertialsystem würde eine Galileo-Transformierte des Kreises beobachten, was im Allgemeinen einer spiralförmigen Bewegung entspricht.

1.6 Bahnbewegung entlang Ellipsen*

Wir wollen hier die vorangegangene Überlegung etwas verallgemeinern, um herauszufinden, ob man auch elliptische Bahnen nur durch eine Zentralkraft erklären kann, und wenn ja, wie diese aussehen muss.

Die wichtige Neuerung für das Modell des Sonnensystems in der Beschreibung von Johannes Kepler (*1571-†1630) war die Interpretation, dass sich die größten Planeten auf elliptischen Bahnen bewegen und dass sich die Sonne in einem der Brennpunkte der Ellipse befindet (erstes Keplersche Gesetz). Die große Halbachse der Ellipse sei a, die kleine b. Die Elliptizität ϵ ist definiert durch $\epsilon = 1 - b^2/a^2$. Der kleinste Abstand des Planeten von der Sonne ist $p_\epsilon = a(1-\epsilon)$ (Perihel), der größte $a_\epsilon = a(1+\epsilon)$ (Aphel). Ein Kreis hat also $\epsilon = 0$ oder $a = b$ und $a_\epsilon = p_\epsilon$; dieser wird somit automatisch in dieser Betrachung mit berücksichtigt. Durch $\{a, b, \epsilon\}$ ist die Form der Ellipse vollständig gegeben. Um die Position des Planeten auf der Ellipse zu definieren, verwenden wir den *zeitabhängigen* Phasenwinkel θ. Wir definieren, dass sich der Planet im Perihel bei $\theta = 0$ befinden soll. Aus der Theorie der Ellipsen folgt für den Abstand $r(\theta)$ zwischen Planet und Sonne

$$r(\theta) = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\theta} \; . \tag{45}$$

Wir wählen nun einen Beobachter, für den die Sonne sich im Ursprung und in Ruhe befindet. Der Ortsvektor des Planet ist damit $\boldsymbol{r}(t) = r(\theta)\boldsymbol{e}_r$, wobei wir der Einfachheit halber wieder die Zeitabhängigkeit von θ und dem Radiusvektor $\boldsymbol{e}_r = \cos\theta\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\boldsymbol{e}_y$ nicht direkt angeben (in dieser Darstellung zeigt $\boldsymbol{e}_x$ in Richtung des Perihels).

Was ist nun die Beschleunigung, die auf den Planeten wirkt? Die ersten zwei Zeitableitungen von $\boldsymbol{r}(t)$ sind (Produktregel)

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}(t) = \dot{r}(\theta)\boldsymbol{e}_r + r(\theta)\begin{pmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta \\ +\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix} = \dot{r}(\theta)\boldsymbol{e}_r + r(\theta)\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \; , \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{r}(t) &= \ddot{r}(\theta)\boldsymbol{e}_r + \dot{r}(\theta)\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{r}(\theta)\dot{\boldsymbol{e}}_\theta + r(\theta)\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\theta}\begin{pmatrix} -\dot{\theta}\cos\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix} && (47)\\
&= \ddot{r}(\theta)\boldsymbol{e}_r + 2\dot{r}(\theta)\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r(\theta)\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\boldsymbol{e}_r && (48)\\
&= (\ddot{r}(\theta) - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}(\theta)\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta \; . && (49)
\end{aligned}$$

Beachte, dass wir hier unsere Kenntnis von $r(\theta)$ noch nicht verwendet haben. Wir tun das erst später, um die Formeln einfach zu halten. Für die Physik der Planetenbewegung gehen wir davon aus, dass die Kraft eine Zentralkraft der Sonne ist, also ist die Beschleunigung tangential zum Radiusvektor, sprich der Koeffizient vor $\boldsymbol{e}_\theta$, Null,

$$2\dot{r}(\theta)\dot{\theta} + r(\theta)\ddot{\theta} = 0 \;\Rightarrow\; 2\dot{r}(\theta)r(\theta)\dot{\theta} + r(\theta)^2\ddot{\theta} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\dot{\theta}r(\theta)^2\Big) = 0 \; . \tag{50}$$

Wir beobachten hier, dass dieser Koeffizient die Zeitableitung von $\dot{\theta}r(\theta)^2$ darstellt, somit ist $L = \dot{\theta}r(\theta)^2$ eine *Erhaltungsgröße*, weil diese nicht mit der Position des Planeten auf der Bahn ändert.

Geometrisch läßt sich L als doppelte Fläche des Dreiecks interpretieren, das von $\boldsymbol{r}(t)$ und der infinitisimalen Bewegung $\langle \boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t, \boldsymbol{e}_r\rangle = r(\theta)\dot{\theta}$ senkrecht zum Radiusvektor aufgespannt wird. Dies ist also das zweite Keplersche Gesetz! Es ist eine direkte Folgerung unserer Forderung, dass die Kraft nur in Richtung des Radiusvektors wirken darf. Beachte, dass wir bisher überhaupt noch nichts über die konkrete Bahnform gesagt haben; L ist bei allen Zentralkraftproblem eine Erhaltungsgröße.

Wir machen jetzt weiter, um die Zentralkraft der Ellipse explizit zu bestimmen. Die Zentralbeschleunigung muss in Richtung von $\boldsymbol{e}_r$ wirken, also ist

$$a_r = \ddot{r}(\theta) - r(\theta)\dot{\theta}^2 = \ddot{r}(\theta) - \frac{L^2}{r(\theta)^3}\ . \tag{51}$$

Der zweite Schritt nutzt die Erhaltungsgröße L, die wir eben gefunden haben. Was ist aber $\ddot{r}(\theta)$? Für die Antwort muss man ein wenig mit der konkreten Bahnform $r(\theta)$ arbeiten (Kettenregel; θ ist die einzige Variable hier):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(\theta) = -\frac{a(1-\epsilon^2)}{(1+\epsilon\cos\theta)^2}\epsilon(-\sin\theta)\dot{\theta} = \frac{\epsilon\sin\theta}{a(1-\epsilon^2)}\,\dot{\theta}r(\theta)^2 = \frac{\epsilon\sin\theta}{a(1-\epsilon^2)}\,L\ , \tag{52}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(\theta) = \ddot{r}(\theta) = \frac{L}{a(1-\epsilon^2)}\,\dot{\theta}\,\epsilon\cos\theta = \frac{L^2}{r(\theta)^2}\,\frac{\epsilon\cos\theta}{a(1-\epsilon^2)} = \frac{L^2}{r(\theta)^2}\left(\frac{1}{r(\theta)} - \frac{1}{a(1-\epsilon^2)}\right)\ . \tag{53}$$

Der letzte Schritt für $\ddot{r}(\theta)$ verwendet die explizite Form von $r(\theta)$ für den Term $\epsilon\cos\theta$. Schließlich erhalten wir

$$a_r = \ddot{r}(\theta) - \frac{L^2}{r(\theta)^3} = \frac{L^2}{r(\theta)^3} - \frac{L^2}{a(1-\epsilon^2)r(\theta)^2} - \frac{L^2}{r(\theta)^3} = -\frac{L^2}{a(1-\epsilon^2)r(\theta)^2} \propto -\frac{1}{r(\theta)^2}\ . \tag{54}$$

Da L, a, ϵ Konstanten sind, ist die Zentralkraft also proportional zu $m/|\boldsymbol{r}|^2$ oder $\boldsymbol{F} \propto -m/|\boldsymbol{r}|^2\boldsymbol{e}_r = m\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|^3$, genauso wie im Falle der Kreisbewegung. Folglich kann man die elliptische Planetenbewegung auch durch eine Zentralkraft erklären, wenn sich die Kraftquelle – die Sonne in diesem Fall – in einem der Brennpunkte befindet.

Diese Betrachtung hier geht natürlich den falschen Weg. Üblicherweise haben wir ein gegebenes System von Körpern und eine physikalische Beschreibung der Kräfte zwischen diesen. Daraus wollen wir dann die Trajektorien vorhersagen. Insbesondere sagt uns die obige Diskussion nichts darüber, ob ein

Kraftgesetz wie das hier gefundene nicht auch andere Bahnen als Ellipsen oder Kreise zulässt. Wir müssen uns also im Folgenden mehr Gedanken über die Lösung von Bewegungsgleichungen machen.

1.7 3. Axiom: Actio=Reactio

Bevor wir uns diesem Problem zuwenden, behandeln wir noch das letzte Axiom der Newtonschen Mechanik. Dieses betrifft eine allgemeine Eigenschaft der Natur von Kräften. Isaac Newton machte die Beobachtung, dass wenn ein Körper K1 eine Kraft $\boldsymbol{F}_{21}$ auf einen zweiten Körper K2 ausübt, K2 auch eine Kraft $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$ auf K1 ausübt. Allgemeiner besagt dieses Axiom für ein System von Körpern:

3. Axiom. *Übt in einem System von Körpern (Punktmassen) ein Körper i die Kraft $\boldsymbol{F}_{ji}$ auf den Körper j aus, dann übt Körper j auch eine Kraft $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$ auf den Körper i aus.*

Besonders offensichtlich wird dieses Gesetz, wenn wir versuchen ein schweres Gewicht über eine Eisfläche zu schieben oder wenn wir in der Schwerelosigkeit ohne Halt eine Schraube festdrehen. Beachte, dass dieses Gesetz nur eine Kraftkomponente betrifft, die auf einen Körper wirkt. Die Resultierende ist nach dem Superpositionsprinzip die Summe aller Kräfte, $\boldsymbol{F}_i = \sum_{j=1}^{N_f} \boldsymbol{F}_{ij}$ auf den Körper i.

Im Übrigen zeigt das 3. Axiom, dass unsere vorherige Diskussion der Planetenbewegung mit Fehlern behaftet sein muss. Wenn nämlich die Sonne eine Kraft mit Beschleunigung $a_{\rm p}$ auf einen Planeten ausübt, dann muß die gleiche Kraft mit umgekehrten Vorzeichen auf die Sonne wirken. Diese muss also auch mit einer Beschleunigung $\boldsymbol{a}_{\rm s}$ reagieren,

$$\boldsymbol{a}_{\rm s} = -\frac{m_{\rm p}}{m_{\rm s}}\boldsymbol{a}_{\rm p} \;, \tag{55}$$

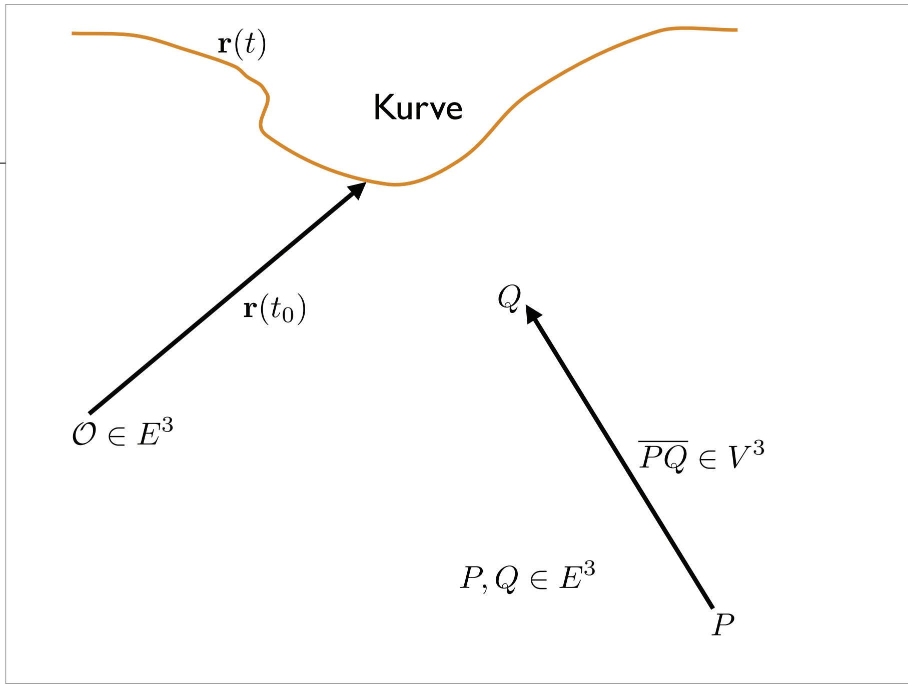
die freilich viel kleiner ist, weil die träge Masse der Sonne sehr groß ist ($m_{\rm erde}/m_{\rm s} \approx 1/333.000$). Die Beschleunigung der Erde ist $\omega^2_{\rm erde}R = (2\pi/T)^2R \approx 0.6\,{\rm cm/s^2}$ mit $T = 365,25{\rm d}$ und $R = 1,5\times10^8\,{\rm km}$, also $a_{\rm s} \approx 0.02\,\mu{\rm m/s^2}$. Die Sonne wird ein klein wenig wackeln und nicht brav im Brennpunkt der Ellipse stehen bleiben. (Die Wechselwirkung der Sonne mit den großen Gasplaneten bewirkt eine deutlich stärkere Bewegung der Sonne).

Anmerkung Das 3. Axiom impliziert, dass instantan eine Kraft auf den Körper K1 wirken muss, wenn Körper K2 eine Kraft auf K1 ausübt. Dies verletzt allerdings das gut belegte Prinzip der Kausalität, demnach, grob besagt, sich Informationen maximal mit der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten können (für jeden Beobachter). Folglich kann dieses Axiom der klassischen Mechanik auch nur eine Näherung sein.

Dieses Problem wird dadurch beseitigt, dass man allen bekannten physikalischen Grundkräften ein Kraftfeld zuordnen kann, in dem sich Änderungen mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten können (*Feldtheorien*). Das Feld überträgt die Kräfte zwischen den Körpern und wird dadurch vorübergehend Träger von Impuls und Energie. *Lokal* bei einer Wechselwirkung mit dem Kraftfeld ist das 3. Axiom exakt gültig. Ein Körper K2 erfährt hiernach erst dann eine Kraft, wenn sich die Störung des Feldes durch den Körper K1 bis nach K2 ausgebreitet hat. Das erfolgt ungefähr nach $\Delta t = c\Delta R$, wenn ΔR den Abstand von K1 und K2 darstellt.

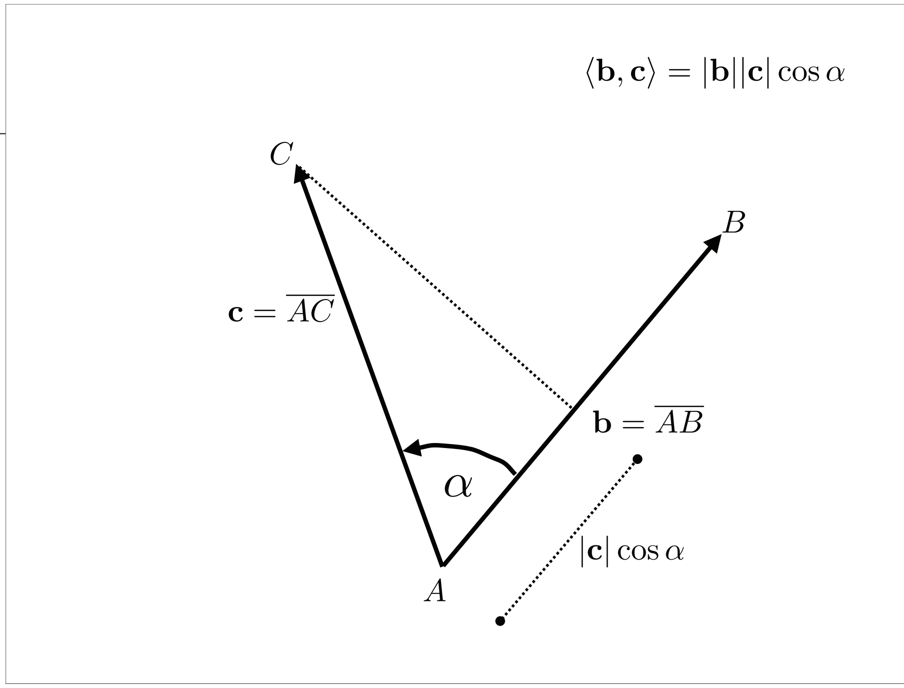
Ein klassischer Vergleich wäre hier ein sehr langes Seil, das an jedem Ende von jeweils einer Person festgehalten wird. Zieht Person K1 (Actio) an einem Ende, wird sich eine Störung entlang des Seils bis K2 mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Durch die Krafteinwirkung von K1 auf das eigene Seilende, erfährt K1 direkt eine Gegenkraft (Reactio). Aber erst wenn die Störung K2 erreicht, wird auch auf K2 eine Kraft vom Seil ausgeübt (Actio). Die Kraft zwischen K1 und K2 breitet sich also als Welle auf dem Seil, dem "Model-Kraftfeld", aus.

Entwickeln sich Systeme dynamisch langsamer als die typische Ausbreitungszeit der Kraftfelder zwischen den Körpern, dann können wir dieses Problem der *retardierten Felder* aber vernachlässigen und das 3. Axiom auch über große Distanz als gegeben betrachten. Davon werden wir hier im Themenkomplex der klassischen Mechanik ausgehen.

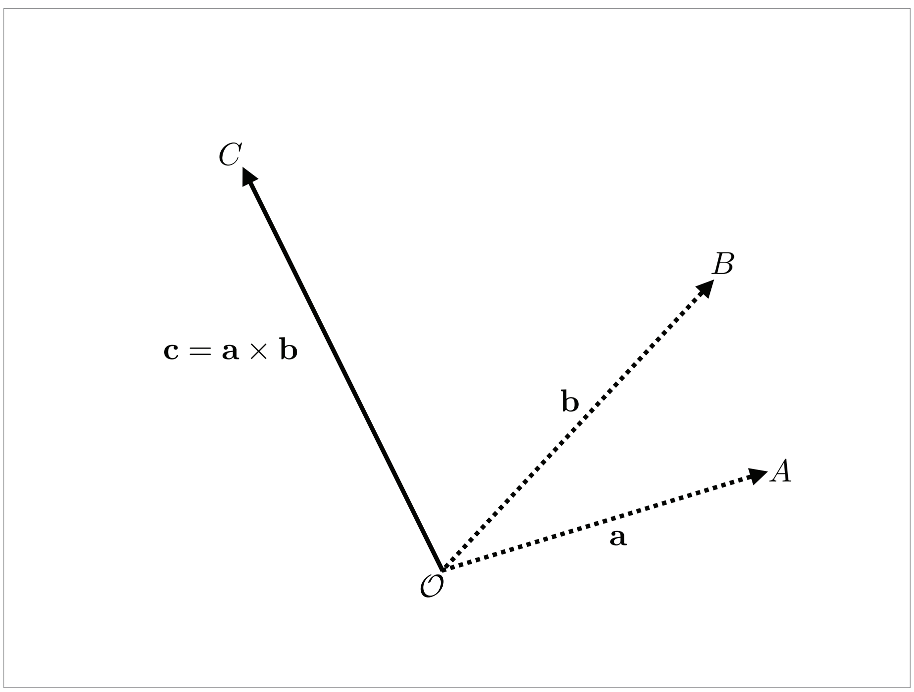


Literatur

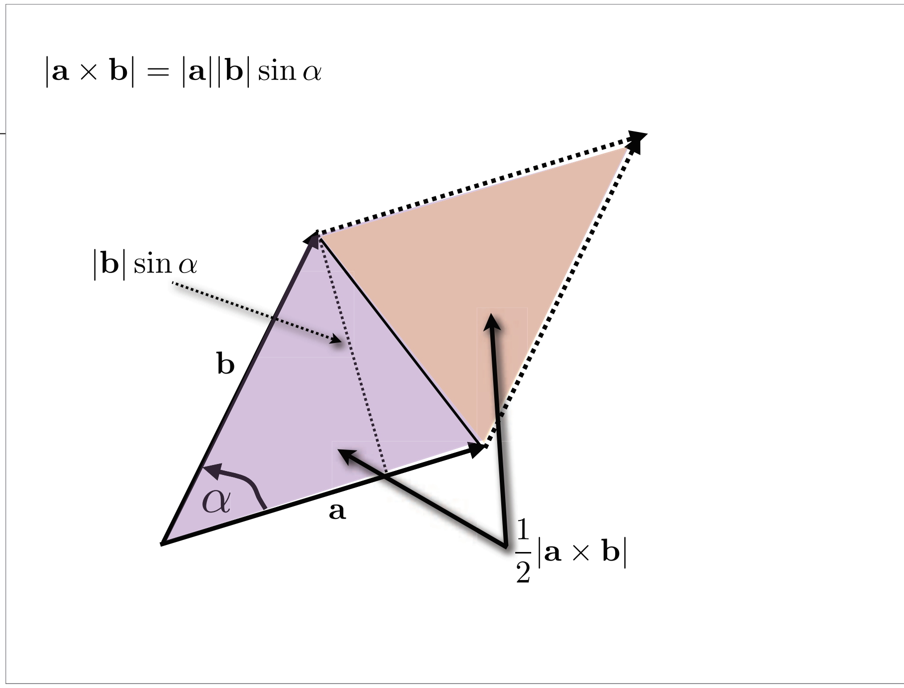
[1] J. Honerkamp and H. Römer. *Klassische Theoretische Physik: Eine Einführung*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2012.



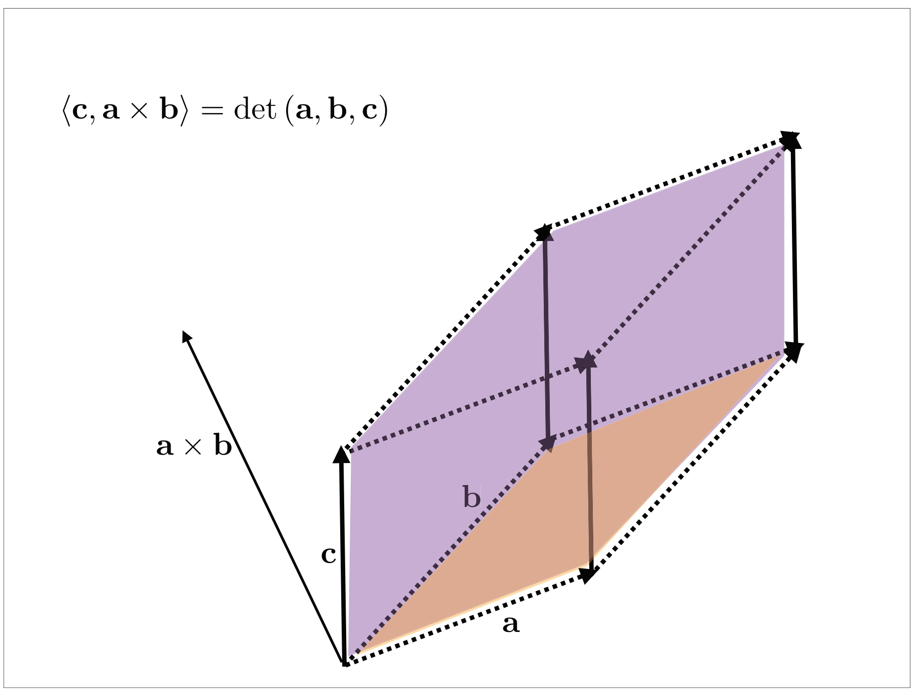
$\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = |\mathbf{b}||\mathbf{c}| \cos \alpha$
C
B
$\mathbf{c} = \overline{AC}$
$\mathbf{b} = \overline{AB}$
α
$|\mathbf{c}| \cos \alpha$
A



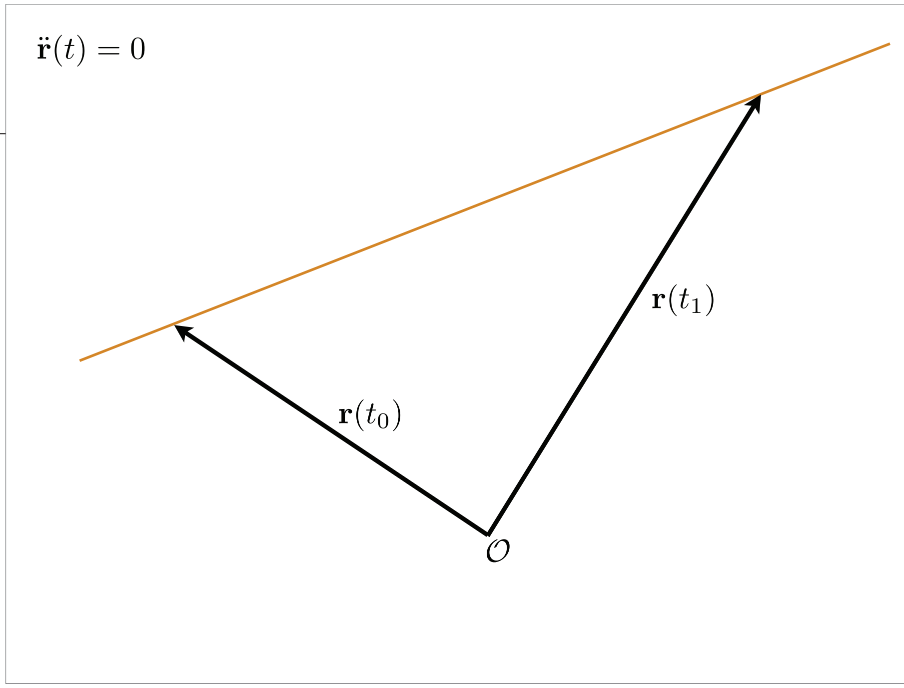
C
B
$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$
$\mathbf{b}$
A
$\mathbf{a}$
O

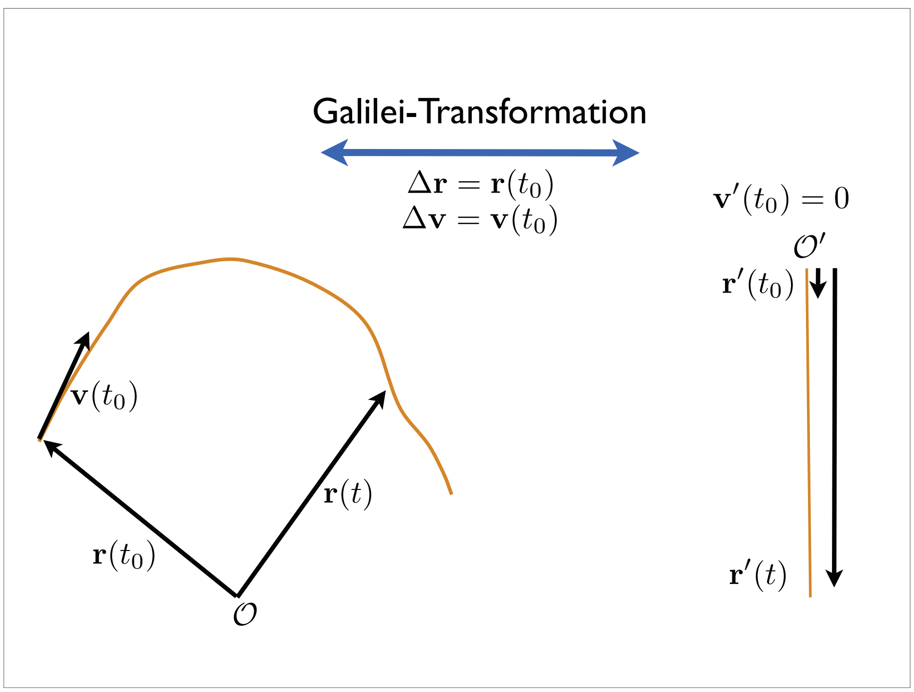


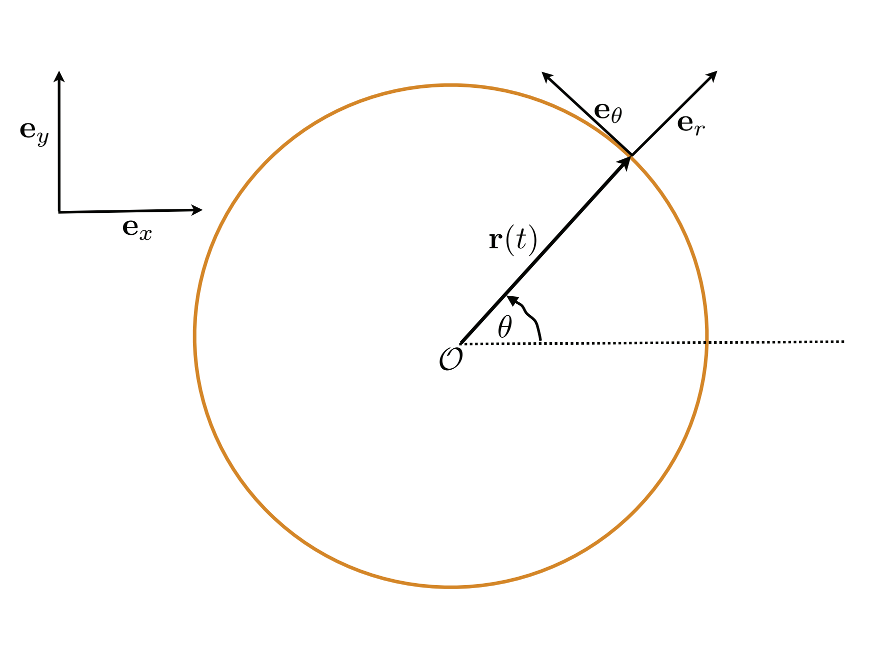
$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\alpha$
$|\mathbf{b}| \sin\alpha$
$\mathbf{b}$
α
$\mathbf{a}$
$\frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$



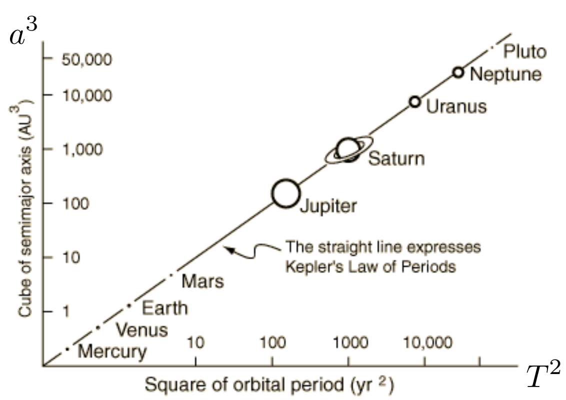
$\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
b
$\mathbf{c}$
$\mathbf{a}$


$\ddot{\mathbf{r}}(t) = 0$
$\mathbf{r}(t_1)$
$\mathbf{r}(t_0)$
$\mathcal{O}$

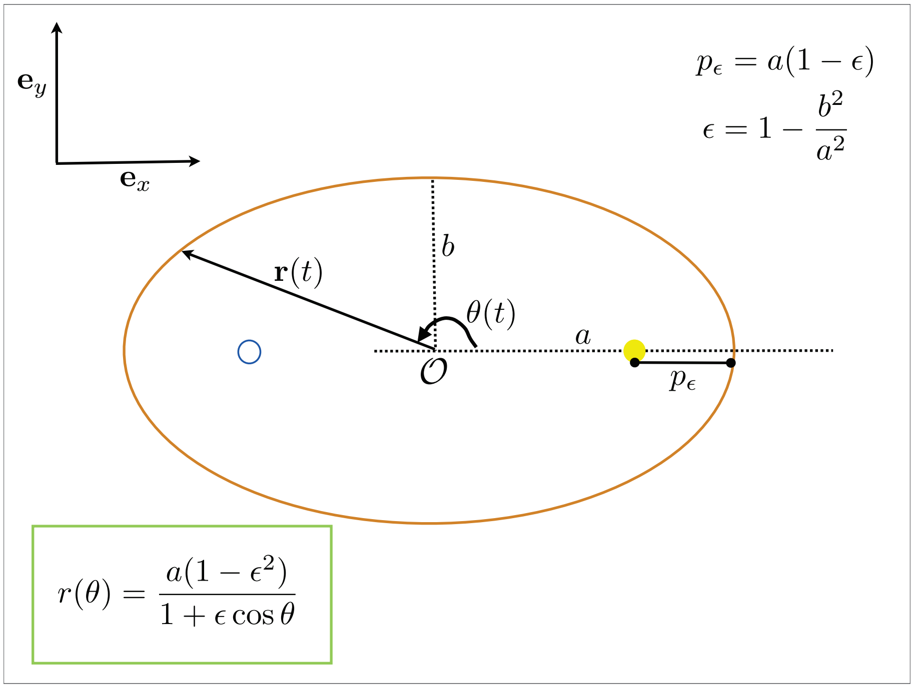

Galilei-Transformation
$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0)$
$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t_0)$
$\mathbf{v}'(t_0) = 0$
$\mathcal{O}'$
$\mathbf{r}'(t_0)$
$\mathbf{v}(t_0)$
$\mathbf{r}(t)$
$\mathbf{r}(t_0)$
$\mathbf{r}'(t)$
$\mathcal{O}$



Quelle: http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/kepler.html



Drittes Keplersches Gesetz


$\mathbf{e}_y$
$\mathbf{e}_x$
$p_\epsilon = a(1-\epsilon)$
$\epsilon = 1 - \frac{b^2}{a^2}$
b
$\mathbf{r}(t)$
$\theta(t)$
a
$\mathcal{O}$
p_ϵ
$r(\theta) = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\theta}$