



# Klassische Theoretische Physik: Mechanik

Patrick Simon

Argelander-Institut für Astronomie

Auf dem Hügel 71

[psimon@astro.uni-bonn.de](mailto:psimon@astro.uni-bonn.de)

27. Januar 2014

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Axiome der Newtonschen Mechanik</b>	<b>1</b>
1.1	Mathematische Beschreibung . . . . .	1
1.2	1. Axiom: kraftfreie Bewegung . . . . .	7
1.3	Inertialsysteme . . . . .	8
1.4	2. Axiom: Kraftdefinition . . . . .	11
1.5	Kreisbewegungen . . . . .	14
1.6	Bahnbewegung entlang Ellipsen* . . . . .	18
1.7	3. Axiom: Actio=Reactio . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Einkörperproblem</b>	<b>24</b>
2.1	Arbeit . . . . .	24
2.2	Kinetische Energie . . . . .	25
2.3	Potenzielle Energie . . . . .	25
2.4	Gesamtenergie . . . . .	27
2.5	Gradientdarstellung konservativer Kraftfelder . . . . .	27
2.6	Das Newtonsche Gravitationsgesetz . . . . .	30
2.7	Eindimensionale Bewegung . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Vielteilchensysteme</b>	<b>34</b>
3.1	Erhaltung der Gesamtenergie . . . . .	35
3.2	Innere und äußere Kräfte . . . . .	37
3.3	Gesamtimpuls . . . . .	38
3.4	Gesamtdrehimpuls . . . . .	41
3.5	Virialsatz . . . . .	43
3.6	Homogene Potenziale . . . . .	45
3.7	Eine Anwendung des Virialsatzes: Galaxienhaufen* . . . . .	47

3.8	Mechanische Ähnlichkeit*	50
<b>4</b>	<b>Zweikörperproblem</b>	<b>53</b>
4.1	Äquivalentes Einkörperproblem	53
4.2	Bewegungsintegrale	55
4.3	Bahnintegral	58
4.4	Geschlossene Bahnen*	59
4.5	Kepler-Problem	59
4.6	3. Keplersches Gesetz	62
4.7	Runge-Lenz-Vektor*	62
4.8	Das gestörte Zweikörperproblem*	64
<b>5</b>	<b>Euler-Lagrange-Gleichungen</b>	<b>69</b>
5.1	Zwangsbedingungen	69
5.2	Zwangsprobleme 2. Art	71
5.3	D'Alembertsches Prinzip	73
5.4	Euler-Lagrange Gleichungen 2. Art	75
5.5	Forminvarianz	79
5.6	Euler-Lagrange Gleichungen 2. Art: konservative Kräfte	79
5.7	Mathematisches Pendel	80
5.8	Dissipationsfunktion*	81
<b>6</b>	<b>Beschleunigte Bezugssysteme</b>	<b>84</b>
6.1	Rotierende Beobachter	84
6.2	Erde-Mond-System	87
<b>7</b>	<b>Erhaltungsgrößen</b>	<b>89</b>
7.1	Anzahl möglicher Erhaltungsgrößen	90
7.2	Zyklische Variablen	91

7.3	Symmetrien der Lagrange-Funktion . . . . .	93
7.4	Erhaltungsgröße aufgrund einer Symmetrie der Lagrange-Funktion . . . . .	94
7.5	Translationen . . . . .	96
7.6	Drehungen . . . . .	97
7.7	Zeitverschiebungen . . . . .	98
7.8	Eichinvarianz der Lagrange-Funktion* . . . . .	101
<b>8</b>	<b>Hamiltonsches Prinzip</b>	<b>104</b>
8.1	Variationsrechnung . . . . .	104
8.2	Prinzip der stationären Wirkung . . . . .	109
8.3	Euler-Lagrange-Gleichungen 1. Art* . . . . .	111
<b>9</b>	<b>Starre Körper</b>	<b>113</b>
9.1	Drehimpuls . . . . .	113
9.2	Kinetische Energie . . . . .	117
9.3	Potenzielle Energie . . . . .	117
9.4	Lagrange-Funktion . . . . .	118
9.5	Hauptträgheitsachsen . . . . .	118
9.6	Euler-Winkel . . . . .	120
9.7	Kinetische Energie mit Euler-Winkeln . . . . .	121
9.8	Schwerer Kreisel . . . . .	124
9.9	Freie starre Körper . . . . .	128
<b>10</b>	<b>Hamilton-Mechanik</b>	<b>130</b>
10.1	Kanonische Gleichungen . . . . .	130
10.2	Bewegung im Phasenraum . . . . .	133
10.3	Hamilton-Algebra . . . . .	136
10.4	Kanonische Transformationen* . . . . .	140
10.5	Hamilton-Jacobi-Theorie* . . . . .	144

10.6 Noether-Theorem* . . . . .	147
<b>11 Potenzialtheorie*</b>	<b>151</b>
11.1 Massenkontinuum . . . . .	151
11.2 Zylindersymmetrie . . . . .	151
11.3 Legendre-Polynome . . . . .	153
11.4 Legendre-Entwicklung des Potentials . . . . .	155
11.5 Sphärisch-symmetrische Potentiale . . . . .	158
11.6 Potenzial einer Scheibe . . . . .	159

# 1 Axiome der Newtonschen Mechanik

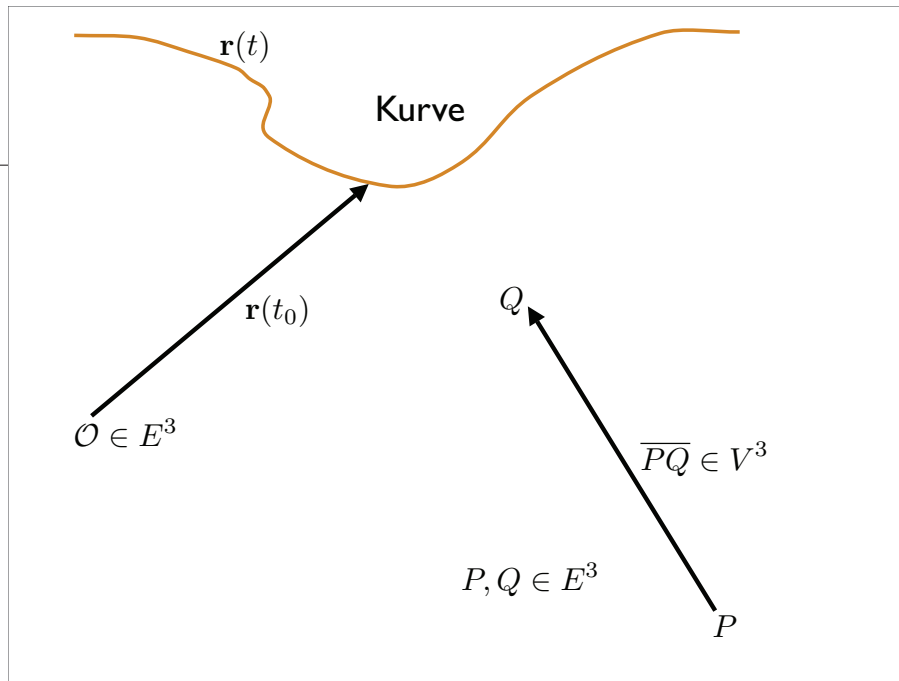
## 1.1 Mathematische Beschreibung

Die Bühne der Newtonschen Mechanik ist ein dreidimensionaler affiner metrischer Raum  $E^3$ . Der Raum enthält Raumpunkte. Der Raum hat den Koordinatenursprung  $O \in E^3$ . Der Verbindungslinie zweier Raumpunkte, einem Punktepaar, ist ein Vektor aus einem dreidimensionalen Vektorraum  $V^3$  zugeordnet. “Differenzen” zweier Punkte aus  $E^3$  sind also Elemente aus  $V^3$ . In  $E^3$  werden die Position einer Punktmasse  $m$  oder eines Körpers mit vernachlässigbaren inneren Freiheitsgraden durch einen Ort  $P \in E^3$  angegeben, der durch den *Ortsvektor*  $r \in V^3$  mit  $O$  verbunden ist;  $r$  ist der Abstandsvektor vom Koordinatenursprung. Wir nennen  $r$  einfach den Ortsvektor relativ zu  $O$ .

Eine Bewegung einer Punktmasse wird durch einen zeitabhängigen Ortsvektor  $r(t)$  mit Zeitparameter  $t$  gegeben. Dies definiert eine *Bahnkurve oder Trajektorie* der Punktmasse, die durch die (stetige) Abbildung  $r(t) : \mathbb{R} \rightarrow V^3$  gegeben ist.

**Definition.** *Unter der Geschwindigkeit  $v(t)$  und Beschleunigung  $a(t)$  des Körpers verstehen wir die ersten zeitlichen Ableitungen der Trajektorie  $r(t)$ ,*

$$v(t) = \frac{d}{dt}r(t) := \dot{r}(t) ; a(t) = \frac{d}{dt}v(t) := \ddot{r}(t) . \quad (1)$$



Für jeden Zeitpunkt  $t$  erhalten wir also einen Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor am entsprechenden Punkt  $r(t)$  der Kurve. Aus Bequemlichkeit notieren wir diese (totalen) zeitlichen Ableitungen mit  $\dot{r}(t)$  für eine zeitliche Ableitung und mit  $\ddot{r}(t)$  für zwei zeitliche Ableitungen.

Unser Vektorraum  $V^3$  ist ein metrischer Raum. Längen und Winkel von Vektoren messen wir mittels des Skalarprodukts  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle : V^3 \times V^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Das Skalarprodukt hat die Eigenschaften

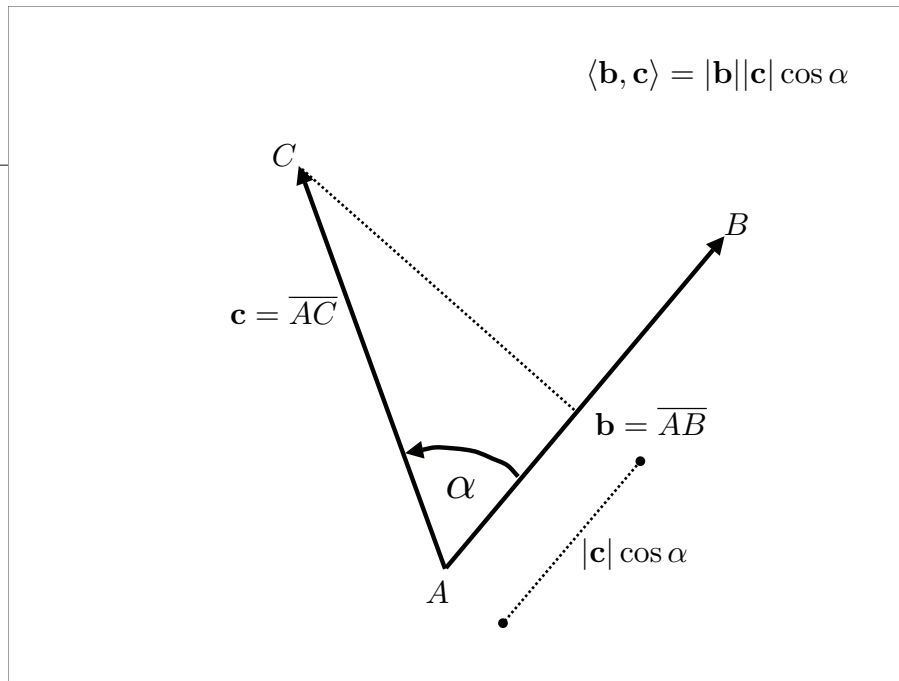
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle, \quad (2)$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle, \quad (3)$$

$$\langle \mathbf{a}, s\mathbf{b} \rangle = \langle s\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, \quad (4)$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle^{1/2} =: |\mathbf{a}| \geq 0; |\mathbf{a}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Der Winkel  $\alpha$ , der durch die Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannt wird, ist definiert durch  $\cos \alpha = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle / (|\mathbf{a}||\mathbf{b}|)$ . Folglich sind zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  mit  $|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}| > 0$  senkrecht oder orthogonal zueinander, wenn  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ , weil dann  $\cos \alpha = 0$ . Außer des Nullvektors  $\mathbf{0}$  läßt sich jeder Vektor  $\mathbf{a}$  auf die Einheitslänge  $|\mathbf{e}| = 1$  durch  $\mathbf{e} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$  normieren. Anschaulich ergibt  $\langle \mathbf{e}, \mathbf{a} \rangle$  die Länge des auf  $\mathbf{e}$  projizierten Vektors  $\mathbf{a}$ , da



$$\langle \mathbf{e}, \mathbf{a} \rangle = \cos \alpha |\mathbf{a}|.$$

Desweiteren definieren wir ein Vektorprodukt  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} : V^3 \times V^3 \rightarrow V^3$  mit den Eigenschaften

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \quad (6)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}, \quad (7)$$

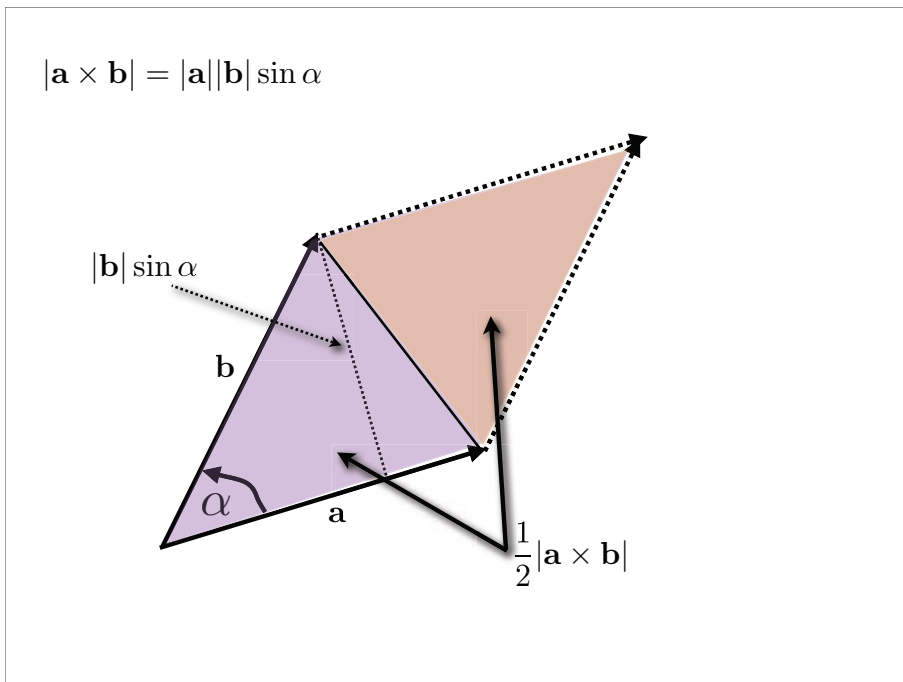
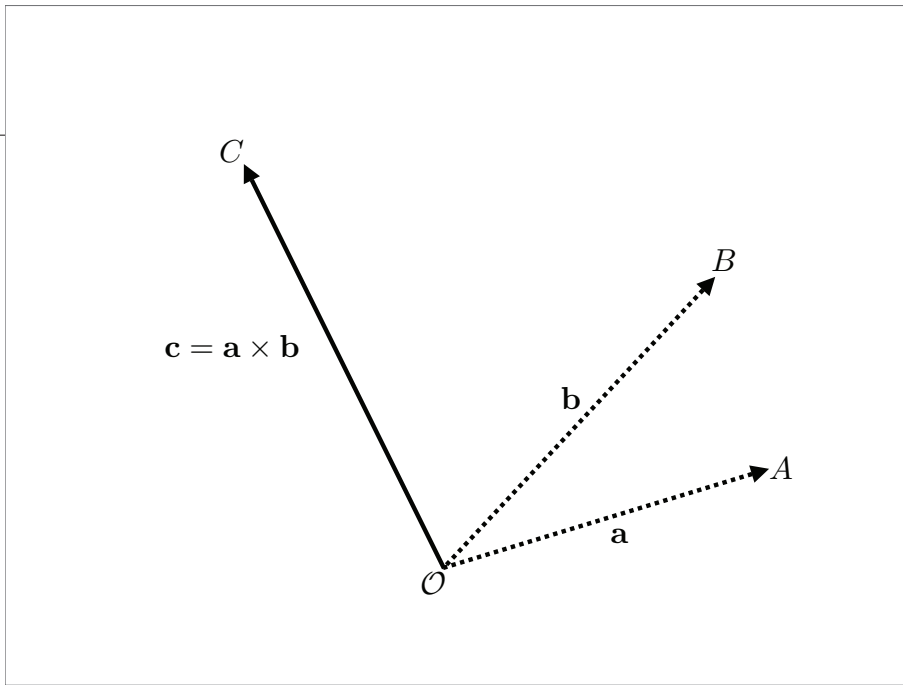
$$\mathbf{b} \times (s\mathbf{a}) = (s\mathbf{b}) \times \mathbf{a}. \quad (8)$$

Auch das Vektorprodukt hat eine anschauliche Interpretation: Der Betrag  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha$  entspricht der Fläche der Parallelogramms, das von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannt wird. Dies entspricht deshalb auch der doppelten Fläche des Dreiecks, das durch die Ortspunkte  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{O}\}$  definiert wird. Die Richtung des Vektors  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  entspricht der Flächennormalen der Fläche, in der sich dieses Dreieck befindet.

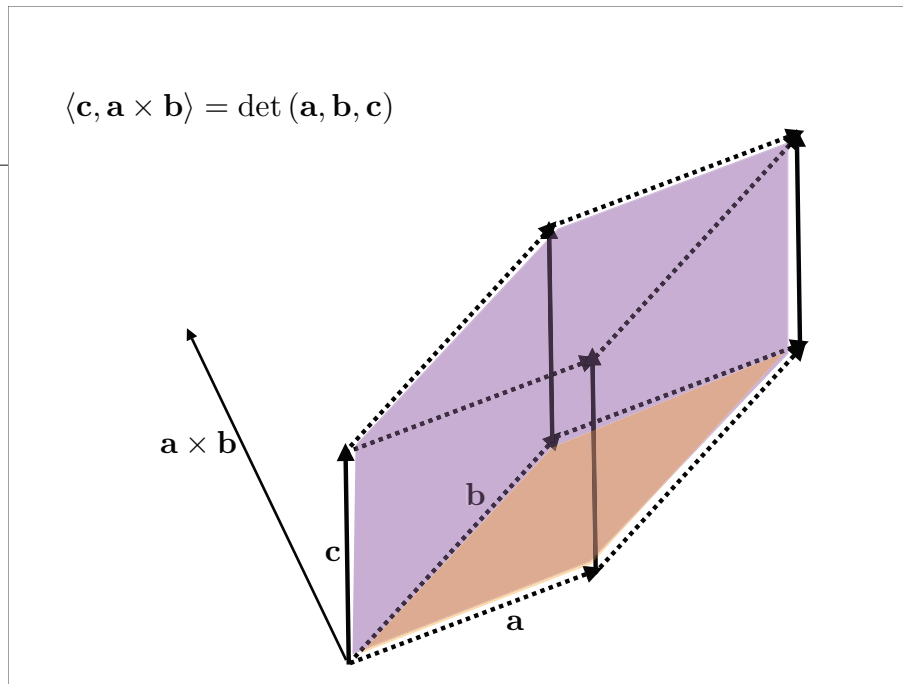
Aus den Eigenschaften des Skalarprodukts und des Vektorprodukts leitet man die folgenden drei Relationen ab

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle - \mathbf{c} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, \quad (9)$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (10)$$







$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|^2. \quad (11)$$

Die erste dieser Relationen besagt (“BACCAB-Regel”; vgl. linke und rechte Seite der Gleichung), dass sich der Vektor des Tripleprodukts in der Ebene befinden muss, die durch  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  aufgespannt wird. Die zweite Relation ist das Volumen des Spats oder des Parallelepipeds, der durch die drei Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  aufgespannt wird. Es gibt demnach geometrisch einen Zusammenhang zwischen dem Skalar- und dem Vektorprodukt. Die dritte Relation erhalten wir aus

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \alpha = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \alpha = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|^2. \quad (12)$$

Durch die Linearität des Skalar- und Vektorprodukts, erhalten wir desweiteren für zeitliche Ableitungen:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t) \rangle = \langle \dot{\mathbf{a}}(t), \mathbf{b}(t) \rangle + \langle \mathbf{a}(t), \dot{\mathbf{b}}(t) \rangle, \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)) = \dot{\mathbf{a}}(t) \times \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \times \dot{\mathbf{b}}(t) \quad (14)$$

und insbesondere

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{a}(t)|^2 = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{a}(t) \rangle = 2 \langle \dot{\mathbf{a}}(t), \mathbf{a}(t) \rangle. \quad (15)$$

Hieraus folgt durch Anwendung der Kettenregel noch eine andere wichtige allgemeine Relation, nämlich

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{a}(t)| = \frac{d}{dt} \sqrt{\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{a}(t) \rangle} = \frac{1}{2\sqrt{\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{a}(t) \rangle}} \frac{d}{dt} |\mathbf{a}(t)|^2 = \frac{\langle \dot{\mathbf{a}}(t), \mathbf{a}(t) \rangle}{|\mathbf{a}(t)|}. \quad (16)$$

Die letzte Relation sagt uns, dass sich der Betrag von  $\mathbf{a}(t)$  entlang der Trajektorie  $\mathbf{a}(t)$  nicht ändert, falls die Änderung  $\dot{\mathbf{a}}(t)$  senkrecht auf  $\mathbf{a}(t)$  steht.

Bezeichnet  $G(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  den Wert einer Funktion beim Ort  $\mathbf{r}$  und für eine Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{r}}$ , dann ist (Kettenregel)

$$\frac{dG(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t)}{dt} = \dot{G}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) \quad (17)$$

$$= \left\langle \frac{\partial G}{\partial \mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial G}{\partial \dot{\mathbf{r}}}, \ddot{\mathbf{r}}(t) \right\rangle + \frac{\partial G}{\partial t} \quad (18)$$

$$= \langle \nabla G, \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle + \langle \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} G, \ddot{\mathbf{r}}(t) \rangle + \frac{\partial G}{\partial t} \quad (19)$$

die zeitliche Änderung vom Wert  $G$  entlang der Kurve  $\mathbf{r}(t)$ . Die partiellen Ableitungen von  $G$  werden an der Stelle  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  und  $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(t)$  ausgewertet. Man notiert hier mit  $\langle \nabla G, d\mathbf{r} \rangle$  die Änderung  $dG$  von  $G$  in Richtung  $d\mathbf{r}$  unter der Voraussetzung, dass  $\dot{\mathbf{r}}$  und  $t$  konstant sind. Ebenso ist  $\langle \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} G, d\dot{\mathbf{r}} \rangle$  die Änderung  $dG$  entlang  $d\dot{\mathbf{r}}$  unter der Voraussetzung, dass  $\mathbf{r}$  und  $t$  konstant sind.

Üblicherweise sucht man sich ein Koordinatensystem mit einer Basis  $\{e_1, e_2, e_3\}$  und  $e_i \in V^3$ , um die Ableitungen mit "Nabla"  $\nabla$  in einem konkreten Problem zu berechnen. Dadurch erhält man eine *Koordinatendarstellung* des Operators. Beachte, dass die Basisvektoren auch vom Ort  $\mathbf{r}$  abhängen dürfen.

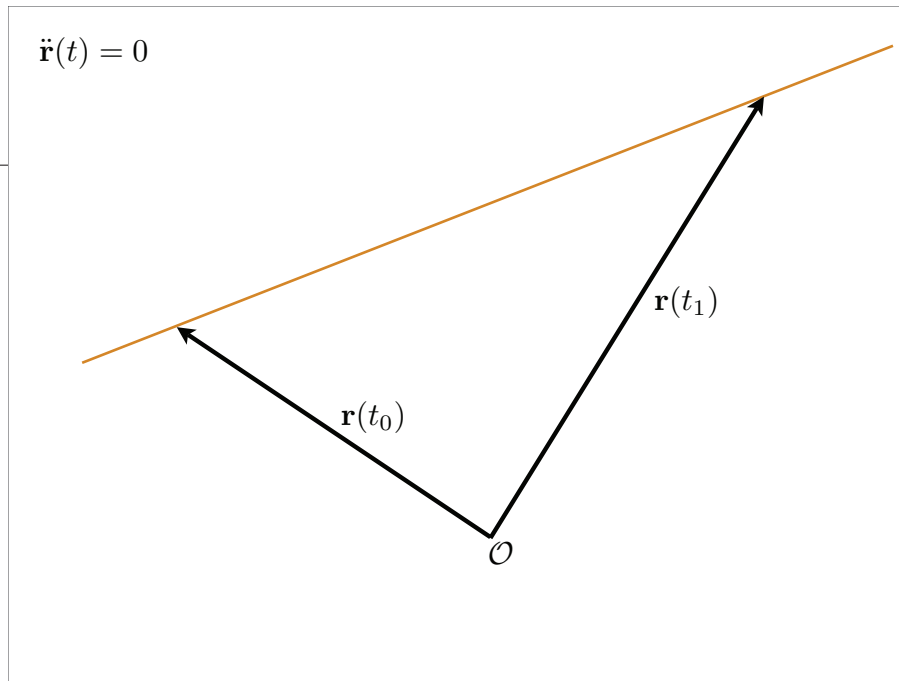
Für ein Kartesisches, ortsunabhängiges Koordinatensystem  $\mathbf{r} = xe_x + ye_y + ze_z$  finden wir:

$$\nabla G = \frac{\partial}{\partial x}(Ge_x) + \frac{\partial}{\partial y}(Ge_y) + \frac{\partial}{\partial z}(Ge_z) = \frac{\partial G}{\partial x}e_x + \frac{\partial G}{\partial y}e_y + \frac{\partial G}{\partial z}e_z; \quad (20)$$

$$\nabla_{\dot{\mathbf{r}}} G = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(Ge_x) + \frac{\partial}{\partial \dot{y}}(Ge_y) + \frac{\partial}{\partial \dot{z}}(Ge_z) = \frac{\partial G}{\partial \dot{x}}e_x + \frac{\partial G}{\partial \dot{y}}e_y + \frac{\partial G}{\partial \dot{z}}e_z. \quad (21)$$

Für eine Serie von algebraischen Operationen benötigt man aber keine Koordinatendarstellung. Man kann allgemeingültig für jedes Koordinatensystem rechnen (koordinatenfrei), durch Rechenregeln wie die Produktregel

$$\nabla(GH) = H\nabla G + G\nabla H. \quad (22)$$



## 1.2 1. Axiom: kraftfreie Bewegung

Der letzte Abschnitt listet die mathematische Struktur des Raumes auf, auf der die Newtonsche Mechanik abgebildet wird. Diese Struktur bildet im Wesentlichen unsere Alltagserfahrung mit geometrischen Objekten ab (relative Lage, Winkel, Abstände). Tatsächlich ist diese algebraische Formalisierung ein eleganter Kunstgriff, der geometrische Argumente auf eine algebraische Struktur mit klaren Rechenregeln überträgt. Diese Darstellung ist relativ neu und war z.B. zu Lebzeiten von Isaac Newton (\*1643-†1727) in dieser Fülle noch nicht bekannt. Deshalb sind viele Beweisgänge in Newton's bahnbrechender Arbeit *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* rein geometrische Argumente, die explizit durch Skizzen geometrisch vorgeführt werden. Die Entwicklung der modernen Mathematik als Sprache der Physik hat uns das Leben in dieser Hinsicht enorm leichter gemacht.

Bisher wurde jedoch noch nichts über die Modellierung physikalischer Gesetze in unserer Darstellung gesagt. Wie z.B. eigentlich die Trajektorien  $\mathbf{r}(t)$  der Punktmassen bestimmt werden. Ein entscheidender Fortschritt in dieser Hinsicht wurde von Newton dadurch erzielt, dass er, basierend auf der Arbeit von Galileo Galilei (\*1564-†1642), eine Kraft nach ihrer Wirkung auf den Bewegungszustand einer Punktmasse

definierte. Unter dem Bewegungszustand versteht man den

**Definition.** *Impuls eines Körpers,*

$$\mathbf{p}(t) = m\mathbf{v}(t) . \quad (23)$$

Man betrachtet nun einen sehr speziellen Bewegungszustand eines Körpers.

**Definition.** *Unter einer gleichförmigen Bewegung eines Körper entlang einer Trajektorie versteht man*

$$\mathbf{a}(t) = 0 ; \frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = 0 . \quad (24)$$

Beachte, dass wir hier davon ausgehen, dass die Masse  $m$  der Punktmasse eine Konstante ist, d.h.  $\dot{m} = 0$ .

Diesen speziellen Zustand benutzt Newton, um die Abwesenheit einer Kraft zu beschreiben (1. Axiom).

**1. Axiom.** *Wirkt keine (resultierende) Kraft auf einen Körper, dann ist seine Bewegung gleichförmig, d.h.  $\dot{\mathbf{p}}(t) = 0$ , oder  $\dot{\mathbf{v}}(t) = 0$ , wenn  $m$  konstant ist.*

Zusätzlich beschränkt man diese Bedingung auf Kräfte, die von physikalischen Kraftquellen, etwa durch Wechselwirkung mit anderen Körpern stammen müssen. Umgekehrt muss eine (physikalische) Kraft am Werk sein, wenn sich der Bewegungszustand eines Körpers abweichend von  $\dot{\mathbf{p}}(t)$  verändert.

Aus einer gleichförmigen Bewegung ergibt sich, dass sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0$  bewegen muss, oder dass die Bahn durch eine Gerade in  $E^3$  gegeben ist, d.h.

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t dt \mathbf{a}(t) = \mathbf{v}_0 = \text{konst} ; \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t dt \mathbf{v}(t) = \mathbf{r}_0 + (t - t_0)\mathbf{v}_0 . \quad (25)$$

Unter dem Zeitpunkt  $t_0$  verstehen wir einen willkürlichen Referenzzeitpunkt, zu dem die Position des Körpers  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$  ist.

### 1.3 Inertialsysteme

Die Konstruktion unseres Raumes  $E^3$  ist nicht eindeutig. Der Ursprung  $\mathcal{O}$  des affinen Raumes kann etwa beliebig gewählt werden. Verschieben wir beispielsweise durch eine Ortstranslation den Ursprung von  $\mathcal{O}$

nach  $\mathcal{P}$  um den Vektor  $\overline{OP} = \Delta\mathbf{r}$ , dann verschieben sich die Ortsvektoren der Trajektorie nach  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) + \Delta\mathbf{r}$ . Dies würde nun die Trajektorie für einen alternativen Beobachter repräsentieren, der sich die Bewegung des gleichen Körpers von einem anderen Beobachtungspunkt ansähe. Für diesen alternativen Beobachter wäre die gleichförmige Bewegung aber immer noch gleichförmig, weil

$$\mathbf{a}'(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}'(t) = 0 \quad (26)$$

aufgrund der Konstanz von  $\Delta\mathbf{r}$ .

Selbiges gilt, wenn wir die Orientierung des Beobachters verändern, indem wir die Trajektorie mit der Abbildung  $D : V^3 \rightarrow V^3$  rotieren, d.h.  $\mathbf{r}'(t) = D\mathbf{r}(t)$ ;  $D$  ist dadurch gegeben, dass es die Längen der Vektoren nicht verändert,  $|D\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{r}(t)|$ , und das diese nicht spiegelt. Dies sieht man wegen

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}'(t) = D\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t) = 0, \quad (27)$$

aufgrund der Konstanz der Abbildung  $D$ .

Was passiert aber, wenn sich der alternative Beobachter  $B_2$  relativ zum ursprünglichen Beobachter  $B_1$  bewegt? Nehmen wir mal an, dass  $B_2$  die Orientierung von  $B_1$  beibehält, aber seinen Ursprung  $O$  permanent verschiebt. Damit meinen wir, dass die Translation mit  $\Delta\mathbf{r}(t)$  zeitabhängig ist.  $B_1$  würde sagen, dass  $B_2$  in Bewegung ist. Das gleiche würde natürlich  $B_2$  auch von  $B_1$  behaupten. Die gleichförmige Trajektorie einer Punktmasse, die  $B_1$  beobachtet, hätte aus Sicht von  $B_2$  nun die Beschleunigung

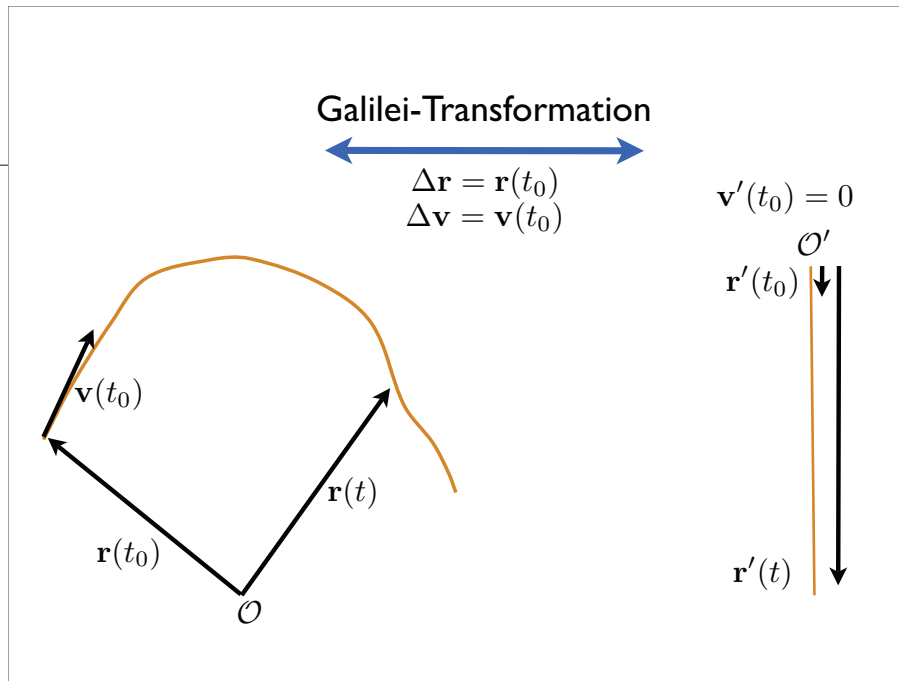
$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}'(t) = \frac{d^2}{dt^2}\Delta\mathbf{r}(t). \quad (28)$$

Diese ist nur dann verschwindend Null, wenn exakt  $\Delta\ddot{\mathbf{r}}(t) = 0$ , also die Verschiebung des Ursprungs linear in der Zeit ist,

$$\Delta\mathbf{r}(t) = (t - t_0)\Delta\mathbf{v} + \Delta\mathbf{r}(t_0); \quad (29)$$

$\Delta\mathbf{v}$  und  $\Delta\mathbf{r}(t_0)$  sind hier konstant. Folglich kann das 1. Axiom nicht für alle Beobachter gültig sein!

Man definiert deshalb Beobachter-Bezugssysteme, in denen sich *alle* Punktmassen, auf die keine Kräfte anderer Körper wirken, gleichförmig bewegen als *Inertialsysteme*. Aus der obigen Argumentation geht hervor, dass diese Bezugssysteme eine Klasse von Beobachter bilden, deren beobachtete Trajektorien durch die



**Definition.** *Galilei-Transformation*

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) + (t - t_0)\Delta\mathbf{v} + \Delta\mathbf{r}(t_0) \quad (30)$$

mit einem *konstantem*  $\Delta\mathbf{v}$  und  $\Delta\mathbf{r}(t_0)$  ineinander überführt werden können. Der Einfachheit halber nehmen wir hier an, dass alle Inertialsysteme die gleiche Orientierung besitzen. Hierbei ist  $\Delta\mathbf{v}$  die Relativgeschwindigkeit der Inertialsysteme. Folglich unterscheiden sich die Geschwindigkeiten der Trajektorien beobachtet in zwei Inertialsystemen höchstens um eine Konstante

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}'(t) - \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}'(t) - \mathbf{v}(t) = \Delta\mathbf{v} , \quad (31)$$

also um deren Relativgeschwindigkeit.

Nochmal: Das 1. Axiom ist nur in einem Inertialsystem gültig. Ein Beobachter mit  $\Delta\dot{\mathbf{r}}(t) \neq 0$  relativ zu einem Inertialsystem wird im Allgemeinen keine gleichförmige Bewegung eines kräftefreien Partikels beobachten! Wir werden dies später anhand von Beispielen illustrieren.

**Anmerkung** Wir haben hier stillschweigend angenommen, dass alle Bezugssysteme den gleichen Zeitparameter  $t$  – die “absolute Zeit” – verwenden können. Dies bedeutet, alle Beobachter verfügen über gleich schnell laufende Uhren, die problemlos synchronisiert werden können. Beobachtungen im 20. Jahrhundert haben aber gezeigt, dass sich Licht für *jeden* Beobachter, ob im Inertialsystem oder nicht, mit gleicher Geschwindigkeit  $c$  ausbreitet. Insbesondere erfüllen die Trajektorien von Lichtstrahlen in zwei Inertialsysteme mit Geschwindigkeitsdifferenz  $\Delta v$  überraschenderweise immer  $|v'(t)| = |v(t)|$ , im eklatanten Widerspruch zur Galileo-Transformation! Es stellte sich heraus, dass die Galileo-Transformation nur näherungsweise für nicht-relativistische Geschwindigkeiten  $|v| \ll c$  gültig ist. Der Widerspruch in der Beobachtung der Lichttrajektorien konnte nur durch eine Abhängigkeit der Zeitmessung vom Beobachter aufgehoben werden. Dies mündete schliesslich in die Formulierung der Speziellen Relativitätstheorie durch Albert Einstein (\*1879-†1955), die wir in der Vorlesung später noch besprechen werden.

## 1.4 2. Axiom: Kraftdefinition

Das 1. Axiom beschreibt den Fingerabdruck einer wirkenden Kraft, ohne zu sagen, wie sich diese quantitativ auswirkt. Dieses Manko wird vom 2. Axiom behoben. Dieses beschreibt, wie sich eine Kraft auf ein Punktteilchen für einen Inertialsystem-Beobachter genau auswirkt:

**2. Axiom.** Eine Kraft  $\mathbf{F}(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  ändert den Bewegungszustand eines Körpers durch

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = m\mathbf{a}(t) = \mathbf{F}(t) . \quad (32)$$

Die Wirkung der Kraft ist eine Beschleunigung  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ , die einen Körper von seiner gleichförmigen Bewegung abbringt. Da die Beschleunigung ein Vektor ist, muss also auch eine Kraft vektoriell sein. Desweiteren reagiert nicht jeder Körper mit der gleichen Beschleunigung auf die gleiche Kraft, wie man leicht im Labor überprüfen kann, z.B. mittels einer Feder und mehrerer Gewichte. Trägere Massen mit größerem  $m$  reagieren mit einer kleineren Beschleunigung und vice versa.

Empirisch findet man außerdem, dass sich Kräfte  $\mathbf{F}_i$  verschiedener Quellen, die auf das gleiche Körper wirken, vektoriell addieren, d.h. man findet das zusätzliche

**Definition.** *Superpositionsprinzip von Kräften,*

$$m\mathbf{a}(t) = \mathbf{F}(t) = \sum_{i=1}^{N_F} \mathbf{F}_i(t) . \quad (33)$$

Deshalb können sich verschiedene Kräfte auch ausgleichen und so in der Summe keinen Einfluss auf die gleichförmige Bewegung eines Körpers haben. Wir machen uns beispielsweise dieses Prinzip zu Nutze, um Kräfte auf ausgedehnte Körper zu betrachten. Hier wird der ausgedehnte Körper als Summe eines Kontinuums von Punktmassen beschrieben, die alle individuell betrachtet werden.

Natürlich wurde bis jetzt nichts über die Natur der Kräfte gesagt, die auf ein Körper wirken. Wir wissen nur, wie wir die Trajektorie zu verändern haben, wenn Kräfte auftreten. Die Details der Natur der Kräfte müssen im Rahmen einer physikalischen Theorie ausgearbeitet werden. Es ist dennoch plausibel anzunehmen, dass eine Kraft sich mit dem Ort eines Körpers und mit der Zeit  $t$  ändern wird, eventuell auch mit dessen Geschwindigkeit. Eine dynamische Beschreibung versucht deshalb die zeitliche Entwicklung des Ortes  $\mathbf{r}(t)$  eines Körpers und die der Kräfte zusammen zu modellieren. Wir können dies formal als Differentialgleichung 2. Ordnung schreiben

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) , \quad (34)$$

oder alternativ als Differentialgleichung 1. Ordnung des Zustandsvektor-Paars  $(\dot{\mathbf{r}}(t), \mathbf{r}(t))^T$ ,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \dot{\mathbf{r}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t)/m \\ \dot{\mathbf{r}}(t) \end{pmatrix} . \quad (35)$$

Die Kenntnis eines physikalischen Modells für  $\mathbf{F}$  vorausgesetzt, bestimmt diese Differentialgleichung die Trajektorie  $\mathbf{r}(t)$ . Da dies eine Differentialgleichung 2. Ordnung ist, ist die Trajektorie durch den Anfangsort  $\mathbf{r}(t_0)$  und der Anfangsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}(t_0)$  eindeutig bestimmt (*Anfangswertproblem*). Eine Lösung läßt sich auch eindeutig durch zwei Orte  $\mathbf{r}(t_1)$  und  $\mathbf{r}(t_2)$  bei verschiedenen Zeitpunkten bestimmen, falls diese durch eine Lösung verbunden werden können (*Randwertproblem*).

Man bezeichnet  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t)$  als *Kraftkurve*. Dies ist die Kraft, die zu einem Zeitpunkt  $t$  auf die Punktmasse der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  beim Ort  $\mathbf{r}(t)$  wirkt. Die Kraftkurve definiert ein Vektorfeld entlang der Trajektorie  $\mathbf{r}(t)$ .



Häufig kann man ein *Kraftfeld*  $\hat{F}(\boldsymbol{x}, t)$  angeben. Dies definiert die Kraft auf einen Körper, wenn der sich an einem bestimmten Punkt  $\boldsymbol{x}$  befinden *würde*. Ist das Kraftfeld die einzige Kraftquelle, dann ist die Kraftkurve durch  $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t), t) = \hat{F}(\boldsymbol{r}(t), t)$  gegeben; mathematisch ist das die Hintereinanderschaltung der Abbildung  $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$  und  $\boldsymbol{r}(t)$ . Üblicherweise kann man die Kraftkurve als Kombination eines Kraftfeldes und einer zusätzlichen Kraft wie etwa einer Reibungskraft  $\boldsymbol{F} \propto -\boldsymbol{v}(t)|\boldsymbol{v}(t)|^n$  mit  $n \in \{0, 1\}$  darstellen ( $n = 0$ : Gleitreibung;  $n = 1$ : Luftreibung). Eine Haftreibung ist komplizierter, weil diese auch von der Kraft abhängt, mit der zwei Materialien zusammengedrückt werden.

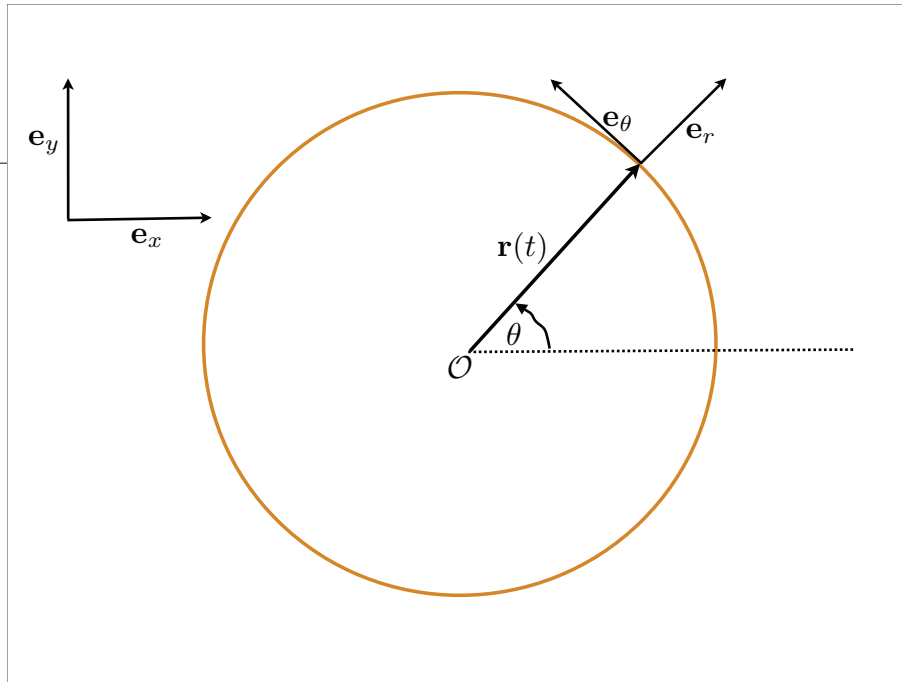
Als einfaches Beispiel mit analytischer Lösung für  $\boldsymbol{r}(t)$  betrachten wir eine konstante Kraft  $\boldsymbol{F} = \text{konst.}$ , die auf eine Punktmasse  $m$  wirken soll. Ein solcher Fall ist z.B. in etwa an der Erdoberfläche gegeben, wo eine konstante Gravitationskraft  $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$  senkrecht zum Horizont auf alle Körper wirkt. Das 2. Axiom sagt uns, dass deshalb eine konstante Beschleunigung  $|\boldsymbol{g}| \approx 9.81 \text{ m/s}^2$  auf die Punktmasse einwirkt. Die Trajektorie erhält man nun durch zweifache Integration von  $m\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = m\boldsymbol{g}$  nach der Zeit,

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \int_{t_0}^t dt' \boldsymbol{g} = \boldsymbol{v}_0 + (t - t_0)\boldsymbol{g}; \quad (36)$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \int_{t_0}^t dt' \boldsymbol{v}(t') = \boldsymbol{r}_0 + (t - t_0)\boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\boldsymbol{g}. \quad (37)$$

Diese Trajektorie beschreibt eine Parabel mit  $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(t_0)$  und  $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}(t_0)$  als Integrationskonstanten, die sich aus den Anfangsbedingungen ergeben. Im zweiten Schritt haben wir die Integrationsvariable nach  $s = t - t_0$  geändert. Besonders einfach wird die Form der Trajektorie, wenn wir in ein Inertialsystem mit  $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0$  und  $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$  wechseln. Die Bewegungsgleichung ist nun  $\boldsymbol{r}'(t) = \frac{1}{2}(t - t_0)^2\boldsymbol{g}$  (Kräfte sind invariant bezgl. der Galilei-Transformation); wir beobachten also nur eine Punktmasse die aus der Ruhe  $\boldsymbol{v}'(t_0) = 0$  nach unten fällt. Für diesen neuen Beobachter B2 kommt die Parabelform, von der der andere Beobachter B1 berichtet, also nur dadurch zustande, dass sich B1 noch zusätzlich gleichförmig mit  $-\Delta\boldsymbol{v}$  bewegt.

**Anmerkung** Kennen wir alle Positionen und Geschwindigkeiten aller Punktmassen zu einem Zeitpunkt  $t_0$  und die Physik der Kräfte zu allen Zeiten  $t$ , dann könnten wir im Grunde die dynamische Entwicklung des Systems zu jedem Zeitpunkt in der Zukunft,  $t > t_0$ , vorhersagen oder rückwirkend für jedem Zeitpunkt



$t < t_0$  in der Vergangenheit rekonstruieren. Die klassische Mechanik ist demnach deterministisch, so wie es durch den Laplacescher Dämon von Pierre-Simon Laplace (\*1749-†1827) zum Ausdruck gebracht wurde.

Diese Betrachtungsweise musste im 20. Jahrhundert durch das Aufkommen der Quantenphysik aber revidiert werden. Hier sind einzelne Positionen und Geschwindigkeiten zufällig, aber dafür ist die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung, denen Positionen und Geschwindigkeiten folgen, deterministisch. Sollte die Streuung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Orten und Geschwindigkeiten klein sein, dann ist die klassische Beschreibung eine sehr gute Näherung. Dies ist in der makroskopischen Welt der Fall.

## 1.5 Kreisbewegungen

Die dynamische Beschreibung zielt also darauf ab, die Teilchentrajektorien aus Anfangsbedingungen und/oder Randwertbedingungen abzuleiten. Wir können das Problem aber auch umgekehrt betrachten. Falls wir die Trajektorie  $\mathbf{r}(t)$  kennen, können wir fragen, welche Kraft notwendig ist, um ein Körper auf

dieser Bahn zu halten. Das wollen wir nun mal anhand zweier Beispiele demonstrieren.

Nehmen wir erstmal an, wir beobachten eine Körper, der sich ausschliesslich auf einer Kreisbahn mit Radius  $R$  bewegt. Der Ursprung  $O$  sei o.B.d.A. im Mittelpunkt des Kreises, d.h.  $|\mathbf{r}(t)| = R = \text{konst.}$  Offensichtlich findet die Bewegung auch nur in einer Ebene statt: der Kreisebene. Die Flächennormale dieser Bahnebene sei der Vektor  $\mathbf{e}_z$ . Es ist also immer  $\langle \mathbf{e}_z, \mathbf{r}(t) \rangle = 0$ . Desweiteren sei der Vektor  $\mathbf{e}_x = \mathbf{r}(t_0)/R$  die Richtung des Körperortes zum Zeitpunkt  $t_0$  und  $\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x$  ein Einheitsvektor senkrecht zu  $\mathbf{e}_z$  und  $\mathbf{e}_x$ . Hierdurch definieren wir ein orthonormales, zeitunabhängiges Koordinatensystem mit den Basisvektoren  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ . Dieses benutzen wir, um die Trajektorie  $\mathbf{r}(t)$  mittels einer einzigen Variablen bzw. *Koordinate*  $\theta(t)$  zu parametrisieren,

$$\mathbf{r}(t) = R \cos \theta(t) \mathbf{e}_x + R \sin \theta(t) \mathbf{e}_y =: \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Dies beschreibt durch das zeitabhängige  $\theta(t)$  jede *beliebige* Kreisbewegung mit Radius  $R$  (im Inertialsystem, in dem der Kreis in Ruhe ist). Der Vektor  $\mathbf{e}_z$  taucht hier nicht mehr auf, weil sich der Ursprung  $O$  im Mittelpunkt des Kreises befindet. Um uns das Leben einfacher zu machen, schreiben wir den Ort  $\mathbf{r}(t)$  auf der rechten Seite in Koordinatenschreibweise als  $2 \times 1$ -Matrix. Es ist einfach zu zeigen, dass sich diese Matrix wie ein Vektor aus  $\mathbb{R}^2$  verhält, wenn wir Vektoren  $\mathbf{r} \in V^3$  der Kreisebene addieren, subtrahieren oder mit Skalaren multiplizieren. Zusätzlich lassen wir im Folgenden das Zeitargument in  $\theta(t)$  weg, behalten aber in Erinnerung, dass  $\theta$  explizit zeitabhängig ist.

Wir fragen uns nun, welche Kraft bei  $\mathbf{r}(t)$  dieser Bewegung entspricht. Nach dem 2. Axiom benötigen wir dafür die zweite Ableitung nach der Zeit von  $\mathbf{r}(t)$ , da  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}(t)$ . Wir beginnen mit der ersten Ableitung,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = R\dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ +\cos \theta \end{pmatrix} =: R\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta. \quad (39)$$

Wir haben hier einen neuen (zeitabhängigen) Einheitsvektor  $\mathbf{e}_\theta := -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y$  eingeführt. Dieser ist tangential zum Kreis bei  $\mathbf{r}(t)$ , wovon man sich durch  $\langle \mathbf{e}_\theta, \mathbf{r}(t) \rangle = 0$  überzeugen kann. Offenbar ist die Geschwindigkeit des Körpers immer tangential zur Kreisbahn! Diesen Ausdruck leiten wir jetzt nochmals

ab:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = R\ddot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ +\cos\theta \end{pmatrix} + R\dot{\theta}^2 \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} =: R\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r =: a_\theta\mathbf{e}_\theta + a_r\mathbf{e}_r. \quad (40)$$

Nun ist  $\mathbf{e}_r := \cos\theta\mathbf{e}_x + \sin\theta\mathbf{e}_y$  ein Einheitsvektor, der vom Kreismittelpunkt in Richtung  $\mathbf{r}(t)$  zeigt: der Radialvektor. So wie  $\mathbf{e}_\theta$  ist  $\mathbf{e}_r$  zeitabhaengig und läuft mit der Bewegung des Körpers mit. Die Vektoren  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$  definieren eine zeitabhängige Basis: ein krummliniges Koordinatensystem.

Wir finden also i.A. zwei Komponenten der Beschleunigung. Eine Komponente  $a_\theta = R\ddot{\theta}$  tangential zum Kreis und eine weitere Komponente  $a_r = R\dot{\theta}^2$ , die den Körper in Richtung des Zentrums beschleunigt. Die Komponente  $a_\theta$  kann nur den Betrag der Bahngeschwindigkeit  $|\mathbf{v}(t)| = |R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta|$  verändern, weil diese in Richtung von  $\mathbf{v}$  bzw.  $\mathbf{e}_\theta$  wirkt. Die Komponente  $a_r$  ist senkrecht zu  $\mathbf{v}(t)$ , weshalb diese nur die Richtung aber *nicht* den Betrag von  $\mathbf{v}(t)$  ändern kann. Erinnerung:  $\frac{d}{dt}|\mathbf{v}| = \langle \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \rangle / |\mathbf{v}|$ .

**Definition.** Die Beschleunigung  $q_r$  entsprechend der Radialkraft

$$F_r = mR\dot{\theta}^2 \quad (41)$$

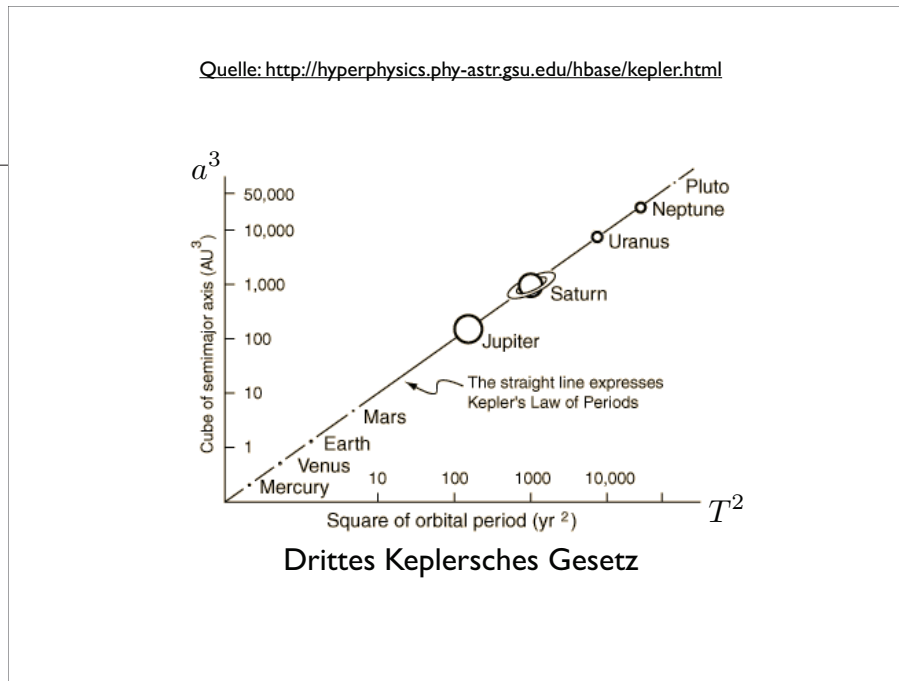
nennt man die Zentripedalkraft.

Rotieren wir etwa einen Stein an einer Schnur mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \dot{\theta}$ , dann muss die Schnur eine Kraft  $F_r$  auf den Stein ausüben, um diesen auf der Bahn zu halten.

Wir sehen uns nochmal kurz die Bahngeschwindigkeit in Gl. (39)  $|\mathbf{v}(t)| = R\dot{\theta}(t)$  an. Wir wissen, dass sowohl  $\mathbf{e}_\theta$  als auch  $\mathbf{e}_r$  in der Ebene liegen, die senkrecht zur Bahnnormalen  $\mathbf{e}_z$  ist. Ausserdem sind  $\mathbf{e}_r$  und  $\mathbf{e}_\theta$  senkrecht zueinander. Deshalb können wir wegen der Eigenschaften des Vektorprodukts  $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r$  schreiben und

$$\mathbf{v}(t) = R\dot{\theta}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r) = (\dot{\theta}\mathbf{e}_z) \times (R\mathbf{e}_r) =: \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t), \quad (42)$$

wobei  $\boldsymbol{\omega}(t) := \dot{\theta}(t)\mathbf{e}_z$  und  $\mathbf{r}(t) = R\mathbf{e}_r$ . Wir können also die Bahngeschwindigkeit einer kreisförmigen Trajektorie  $\mathbf{v}(t)$  als Vektorprodukt der vektoriellen Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  und dem Ortsvektor  $\mathbf{r}(t)$  angeben. Diese Relation gilt auch noch, wenn wir den Ursprung senkrecht zur Bahnebene um  $\Delta\mathbf{r}$  verschieben, da  $\boldsymbol{\omega} \times \Delta\mathbf{r} = 0$ . Aber nicht mehr bei Verschiebungen des Ursprungs in der Bahnebene. Die



Richtung von  $\omega$  definiert die Orientierung der Bahnebene, wohingegen der Betrag  $\omega(t) = |\omega(t)|$  die Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$  ist.

Beachte, dass wir in der Schreibweise  $\omega(t) \times r(t)$  kein Basissystem mehr brauchen, um die Geschwindigkeit  $v(t)$  zu beschreiben. Dieser Ausdruck ist *koordinatenfrei*. Zusätzlich können wir nun auch die Beschleunigung koordinatenfrei für die Kreisbahn angeben:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \dot{\omega}(t) \times r(t) + \omega(t) \times v(t) = \underline{\dot{\omega}(t) \times r(t)} + \omega(t) \times \omega(t) \times r(t). \quad (43)$$

Der erste Term auf der rechten Seite verschwindet, falls  $\omega$  konstant ist. Falls nicht, entspricht er aber nur einer Beschleunigung, die senkrecht zu  $r(t)$  oder  $e_r$  ist, da  $r(t)$  ein Faktor des Vektorprodukts ist. Diesem Term entspricht also die Beschleunigung in der zu  $e_r$  senkrechten Ebene, so dass dem anderen Term

$$F = m\omega(t) \times \omega(t) \times r(t) \quad (44)$$

die Zentripetalkraft in vektorieller, koordinatenfreier Form entsprechen muss.

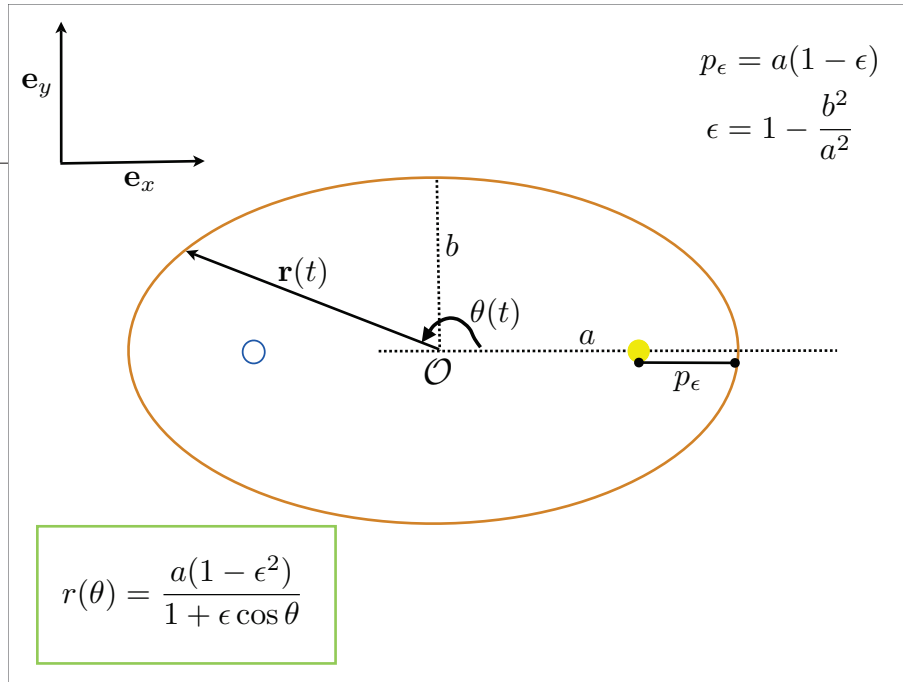
**Anmerkung** Isaac Newton benutzte den Ausdruck der Zentripedalkraft  $F_r = mR\dot{\theta}^2$ , um das Gesetz der Gravitationskraft folgendermaßen zu raten [2]. Ihm war das dritte Keplersche Gesetz bekannt, demzufolge bei Planeten-Kreisbahnen ein Zusammenhang zwischen der Umlaufzeit  $T$  und dem Bahnradius  $R$  besteht:  $R^3/T^2 = \text{konst.} =: C$ . Außerdem wusste man wegen des zweiten Keplerschen Gesetzes, dass ein Planet auf der Kreisbahn sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta} = \omega$  bewegen muss. Da aber  $\omega = 2\pi/T$  folgt  $R^3\omega^2 = C/(2\pi)^2$  oder  $R\omega^2 = C/(2\pi)^2/R^2$ . Folglich muss ein solcher Planet mit der Zentripedalkraft  $F_r = mC/(2\pi)^2/R^2 \propto 1/R^2$  angezogen werden. Da die Proportionalitätskonstante nicht vom Planeten im Sonnensystem abhängt, kann diese nicht von der Masse des Planeten abhängen. Die eigentliche Leistung Newtons bestand allerdings in diesem Zusammenhang darin, zu zeigen, dass die gleiche Kraft auch elliptische Bahnen erklärt (erstes Keplersche Gesetz) und dass diese *alle* (damals bekannten) gravitativ gebundenen Systeme beschreiben kann (z.B. das Erde-Mond System, die Jupiter-Monde, Erdanziehung an der Erdoberfläche, Kometen).

Abschließend sei noch erwähnt, dass nur ein Beobachter eine Kreisbahn für  $F$  wie in Gl. (44) beobachtet, wenn sich der Kreismittelpunkt in Ruhe befindet. Jedes andere Inertialsystem würde eine Galileo-Transformierte des Kreises beobachten, was im Allgemeinen einer spiralförmigen Bewegung entspricht.

## 1.6 Bahnbewegung entlang Ellipsen\*

Wir wollen hier die vorangegangene Überlegung etwas verallgemeinern, um herauszufinden, ob man auch elliptische Bahnen nur durch eine Zentralkraft erklären kann, und wenn ja, wie diese aussehen muss.

Die wichtige Neuerung für das Modell des Sonnensystems in der Beschreibung von Johannes Kepler (\*1571-†1630) war die Interpretation, dass sich die größten Planeten auf elliptischen Bahnen bewegen und dass sich die Sonne in einem der Brennpunkte der Ellipse befindet (erstes Keplersche Gesetz). Die große Halbachse der Ellipse sei  $a$ , die kleine  $b$ . Die Elliptizität  $\epsilon$  ist definiert durch  $\epsilon = 1 - b^2/a^2$ . Der kleinste Abstand des Planeten von der Sonne ist  $p_\epsilon = a(1 - \epsilon)$  (Perihel), der größte  $a_\epsilon = a(1 + \epsilon)$  (Aphel). Ein Kreis hat also  $\epsilon = 0$  oder  $a = b$  und  $a_\epsilon = p_\epsilon$ ; dieser wird somit automatisch in dieser Betrachtung mit berücksichtigt. Durch  $\{a, b, \epsilon\}$  ist die Form der Ellipse vollständig gegeben. Um die Position des Planeten auf der Ellipse zu definieren, verwenden wir den *zeitabhängigen* Phasenwinkel  $\theta$ . Wir definieren, dass



sich der Planet im Perihel bei  $\theta = 0$  befinden soll. Aus der Theorie der Ellipsen folgt für den Abstand  $r(\theta)$  zwischen Planet und Sonne

$$r(\theta) = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \theta}. \quad (45)$$

Wir wählen nun einen Beobachter, für den die Sonne sich im Ursprung und in Ruhe befindet. Der Ortsvektor des Planet ist damit  $\mathbf{r}(t) = r(\theta)\mathbf{e}_r$ , wobei wir der Einfachheit halber wieder die Zeitabhängigkeit von  $\theta$  und dem Radiusvektor  $\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y$  nicht direkt angeben (in dieser Darstellung zeigt  $\mathbf{e}_x$  in Richtung des Perihels).

Was ist nun die Beschleunigung, die auf den Planeten wirkt? Die ersten zwei Zeitableitungen von  $\mathbf{r}(t)$  sind (Produktregel)

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \dot{r}(\theta) \mathbf{e}_r + r(\theta) \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \\ +\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} = \dot{r}(\theta) \mathbf{e}_r + r(\theta) \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad (46)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \ddot{r}(\theta) \mathbf{e}_r + \dot{r}(\theta) \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{r}(\theta) \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r(\theta) \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r(\theta) \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \cos \theta \\ -\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$= \ddot{r}(\theta)e_r + 2\dot{r}(\theta)\dot{\theta}e_\theta + r(\theta)\ddot{\theta}e_\theta - r\dot{\theta}^2e_r \quad (48)$$

$$= (\ddot{r}(\theta) - r\dot{\theta}^2)e_r + (2\dot{r}(\theta)\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e_\theta . \quad (49)$$

Beachte, dass wir hier unsere Kenntnis von  $r(\theta)$  noch nicht verwendet haben. Wir tun das erst später, um die Formeln einfach zu halten. Für die Physik der Planetenbewegung gehen wir davon aus, dass die Kraft eine Zentralkraft der Sonne ist, also ist die Beschleunigung tangential zum Radiusvektor, sprich der Koeffizient vor  $e_\theta$ , Null,

$$2\dot{r}(\theta)\dot{\theta} + r(\theta)\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow 2\dot{r}(\theta)r(\theta)\dot{\theta} + r(\theta)^2\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{\theta}r(\theta)^2) = 0 . \quad (50)$$

Wir beobachten hier, dass dieser Koeffizient die Zeitableitung von  $\dot{\theta}r(\theta)^2$  darstellt, somit ist  $L = \dot{\theta}r(\theta)^2$  eine *Erhaltungsgröße*, weil diese nicht mit der Position des Planeten auf der Bahn ändert.

Geometrisch läßt sich  $L$  als doppelte Fläche des Dreiecks interpretieren, das von  $r(t)$  und der infinitesimalen Bewegung  $\langle v(t)dt, e_r \rangle = r(\theta)\dot{\theta}$  senkrecht zum Radiusvektor aufgespannt wird. Dies ist also das zweite Keplersche Gesetz! Es ist eine direkte Folgerung unserer Forderung, dass die Kraft nur in Richtung des Radiusvektors wirken darf. Beachte, dass wir bisher überhaupt noch nichts über die konkrete Bahnform gesagt haben;  $L$  ist bei allen Zentralkraftproblem eine Erhaltungsgröße.

Wir machen jetzt weiter, um die Zentralkraft der Ellipse explizit zu bestimmen. Die Zentralbeschleunigung muss in Richtung von  $e_r$  wirken, also ist

$$a_r = \ddot{r}(\theta) - r(\theta)\dot{\theta}^2 = \ddot{r}(\theta) - \frac{L^2}{r(\theta)^3} . \quad (51)$$

Der zweite Schritt nutzt die Erhaltungsgröße  $L$ , die wir eben gefunden haben. Was ist aber  $\ddot{r}(\theta)$ ? Für die Antwort muss man ein wenig mit der konkreten Bahnform  $r(\theta)$  arbeiten (Kettenregel;  $\theta$  ist die einzige Variable hier):

$$\frac{d}{dt}r(\theta) = -\frac{a(1-\epsilon^2)}{(1+\epsilon\cos\theta)^2}\epsilon(-\sin\theta)\dot{\theta} = \frac{\epsilon\sin\theta}{a(1-\epsilon^2)}\dot{\theta}r(\theta)^2 = \frac{\epsilon\sin\theta}{a(1-\epsilon^2)}L , \quad (52)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}r(\theta) = \ddot{r}(\theta) = \frac{L}{a(1-\epsilon^2)}\dot{\theta}\epsilon\cos\theta = \frac{L^2}{r(\theta)^2}\frac{\epsilon\cos\theta}{a(1-\epsilon^2)} = \frac{L^2}{r(\theta)^2}\left(\frac{1}{r(\theta)} - \frac{1}{a(1-\epsilon^2)}\right) . \quad (53)$$

Der letzte Schritt für  $\ddot{r}(\theta)$  verwendet die explizite Form von  $r(\theta)$  für den Term  $\epsilon\cos\theta$ . Schließlich erhalten wir

$$a_r = \ddot{r}(\theta) - \frac{L^2}{r(\theta)^3} = \frac{L^2}{r(\theta)^3} - \frac{L^2}{a(1-\epsilon^2)r(\theta)^2} - \frac{L^2}{r(\theta)^3} = -\frac{L^2}{a(1-\epsilon^2)r(\theta)^2} \propto -\frac{1}{r(\theta)^2} . \quad (54)$$



Da  $L, a, \epsilon$  Konstanten sind, ist die Zentralkraft also proportional zu  $m/|\mathbf{r}|^2$  oder  $\mathbf{F} \propto -m/|\mathbf{r}|^2 \mathbf{e}_r = m\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ , genauso wie im Falle der Kreisbewegung. Folglich kann man die elliptische Planetenbewegung auch durch eine Zentralkraft erklären, wenn sich die Kraftquelle – die Sonne in diesem Fall – in einem der Brennpunkte befindet.

Diese Betrachtung hier geht natürlich den falschen Weg. Üblicherweise haben wir ein gegebenes System von Körpern und eine physikalische Beschreibung der Kräfte zwischen diesen. Daraus wollen wir dann die Trajektorien vorhersagen. Insbesondere sagt uns die obige Diskussion nichts darüber, ob ein Kraftgesetz wie das hier gefundene nicht auch andere Bahnen als Ellipsen oder Kreise zulässt. Wir müssen uns also im Folgenden mehr Gedanken über die Lösung von Bewegungsgleichungen machen.

### 1.7 3. Axiom: Actio=Reactio

Bevor wir uns diesem Problem zuwenden, behandeln wir noch das letzte Axiom der Newtonschen Mechanik. Dieses betrifft eine allgemeine Eigenschaft der Natur von Kräften. Isaac Newton machte die Beobachtung, dass wenn ein Körper K1 eine Kraft  $\mathbf{F}_{21}$  auf einen zweiten Körper K2 ausübt, K2 auch eine Kraft  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$  auf K1 ausübt. Allgemeiner besagt dieses Axiom für ein System von Körpern:

**3. Axiom.** *Übt in einem System von Körpern (Punktmassen) ein Körper  $i$  die Kraft  $\mathbf{F}_{ji}$  auf den Körper  $j$  aus, dann übt Körper  $j$  auch eine Kraft  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$  auf den Körper  $i$  aus.*

Besonders offensichtlich wird dieses Gesetz, wenn wir versuchen ein schweres Gewicht über eine Eisfläche zu schieben oder wenn wir in der Schwerelosigkeit ohne Halt eine Schraube festdrehen. Beachte, dass dieses Gesetz nur eine Kraftkomponente betrifft, die auf einen Körper wirkt. Die Resultierende ist nach dem Superpositionsprinzip die Summe aller Kräfte,  $\mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^{N_f} \mathbf{F}_{ij}$  auf den Körper  $i$ .

Im Übrigen zeigt das 3. Axiom, dass unsere vorherige Diskussion der Planetenbewegung mit Fehlern behaftet sein muss. Wenn nämlich die Sonne eine Kraft mit Beschleunigung  $\mathbf{a}_p$  auf einen Planeten ausübt, dann muß die gleiche Kraft mit umgekehrten Vorzeichen auf die Sonne wirken. Diese muss also auch mit einer Beschleunigung  $\mathbf{a}_s$  reagieren,

$$\mathbf{a}_s = -\frac{m_p}{m_s} \mathbf{a}_p, \quad (55)$$

die freilich viel kleiner ist, weil die träge Masse der Sonne sehr groß ist ( $m_{\text{erde}}/m_{\text{s}} \approx 1/333.000$ ). Die Beschleunigung der Erde ist  $\omega_{\text{erde}}^2 R = (2\pi/T)^2 R \approx 0.6 \text{ cm/s}^2$  mit  $T = 365,25 \text{ d}$  und  $R = 1,5 \times 10^8 \text{ km}$ , also  $a_{\text{s}} \approx 0.02 \mu\text{m/s}^2$ . Die Sonne wird ein klein wenig wackeln und nicht brav im Brennpunkt der Ellipse stehen bleiben. (Die Wechselwirkung der Sonne mit den großen Gasplaneten bewirkt eine deutlich stärkere Bewegung der Sonne).

**Anmerkung** Das 3. Axiom impliziert, dass instantan eine Kraft auf den Körper K1 wirken muss, wenn Körper K2 eine Kraft auf K1 ausübt. Dies verletzt allerdings das gut belegte Prinzip der Kausalität, demnach, grob besagt, sich Informationen maximal mit der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit  $c$  ausbreiten können (für jeden Beobachter). Folglich kann dieses Axiom der klassischen Mechanik auch nur eine Näherung sein.

Dieses Problem wird dadurch beseitigt, dass man allen bekannten physikalischen Grundkräften ein Kraftfeld zuordnen kann, in dem sich Änderungen mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten können (*Feldtheorien*). Das Feld überträgt die Kräfte zwischen den Körpern und wird dadurch vorübergehend Träger von Impuls und Energie. *Lokal* bei einer Wechselwirkung mit dem Kraftfeld ist das 3. Axiom exakt gültig. Ein Körper K2 erfährt hiernach erst dann eine Kraft, wenn sich die Störung des Feldes durch den Körper K1 bis nach K2 ausgebreitet hat. Das erfolgt ungefähr nach  $\Delta t = c\Delta R$ , wenn  $\Delta R$  den Abstand von K1 und K2 darstellt.

Ein klassischer Vergleich wäre hier ein sehr langes Seil, das an jedem Ende von jeweils einer Person festgehalten wird. Zieht Person K1 (*Actio*) an einem Ende, wird sich eine Störung entlang des Seils bis K2 mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Durch die Krafteinwirkung von K1 auf das eigene Seilende, erfährt K1 direkt eine Gegenkraft (*Reactio*). Aber erst wenn die Störung K2 erreicht, wird auch auf K2 eine Kraft vom Seil ausgeübt (*Actio*). Die Kraft zwischen K1 und K2 breitet sich also als Welle auf dem Seil, dem "Model-Kraftfeld", aus.

Entwickeln sich Systeme dynamisch langsamer als die typische Ausbreitungszeit der Kraftfelder zwischen den Körpern, dann können wir dieses Problem der *retardierten Felder* aber vernachlässigen und das 3. Axiom auch über große Distanz als gegeben betrachten. Davon werden wir hier im Themenkomplex

der klassischen Mechanik ausgehen.

## 2 Einkörperproblem

### 2.1 Arbeit

Wir können die Wirkung der Kraftkurve  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t)$  auf einen Körper auch so verstehen, dass diese physikalisch die Arbeit  $dW = \langle \mathbf{F}, d\mathbf{r} \rangle$  an dem Körper verrichtet. Deshalb:

**Definition.** Wir bezeichnen  $dW = \langle \mathbf{F}, d\mathbf{r} \rangle$  als die Arbeit, die an einem Körper geleistet wird, um diesen um  $d\mathbf{r}$  im Kraftfeld zu verschieben. Unter der Leistung  $P$  verstehen wir die Arbeit, die pro Zeiteinheit  $dt$  geleistet wird, also  $P = dW/dt = \langle \mathbf{F}, d\mathbf{r} \rangle/dt = \langle \mathbf{F}, \dot{\mathbf{r}} \rangle = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle$ .

Bei einer gleichförmigen Bewegung wird wegen  $\mathbf{F} = 0$  keine Arbeit am Körper verrichtet,  $dW = 0$ . Es wird aber auch keine Arbeit geleistet, wenn eine nicht-verschwindende Kraft senkrecht zur Bewegung  $d\mathbf{r} = d\mathbf{v} dt$  steht, weil auch dann  $dW = 0$ . Folglich kann nur dann Arbeit an einem Körper geleistet werden, wenn eine Kraft *in Richtung der Bewegung* wirkt und so den Betrag der Geschwindigkeit verändert. Anders ausgedrückt: Kräfte können wirken, ohne notwendigerweise Arbeit zu leisten. An einem Körper, der sich mit konstantem  $|\mathbf{v}|$  auf einer Kreisbahn bewegt, wird demnach physikalisch keine Arbeit geleistet. Die Arbeit hat ein positives Vorzeichen, wenn die Kraft in Richtung der Bewegung  $d\mathbf{r}$  wirkt und vice versa.

Wir betrachten erstmal nur Kraftfelder  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , die ausschließlich vom Ort  $\mathbf{x}$  abhängen. Was ist die gesamte Arbeit  $W(t_0, t_1)$ , die ein Körper erfährt, wenn sich dieser auf einer Kurve  $\mathbf{r}(t)$  von  $\mathbf{r}(t_0) =: \mathbf{r}_0$  nach  $\mathbf{r}(t_1) =: \mathbf{r}_1$  bewegt? Die Antwort erhalten wir, in dem wir alle infinitesimalen Arbeitsschritte  $dW(t)$  zu den Zeitpunkten  $t$  entlang der Trajektorie aufaddieren, oder durch das Integral

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} dW(t) = \int_{t_0}^{t_1} dt P(t) = \int_{t_0}^{t_1} dt \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle =: \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}), d\mathbf{r} \rangle. \quad (56)$$

Dieser Ausdruck ist mathematisch ein *Wegintegral* entlang der Trajektorie  $\mathbf{r}(t)$ , die mit dem Zeitparameter  $t$  parametrisiert wird; zum Zeitpunkt  $t$  wirkt die Kraft  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ .

Man kann zeigen, dass das Ergebnis  $W(t_0, t_1)$  unabhängig von der Wahl der Parametrisierung der Kurve  $\mathbf{r}(t)$  ist. Wir könnten also eine neue (stetig und differenzierbare) Parametrisierung  $\sigma(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

der Bahnkurve mit  $\mathbf{r}(\sigma_0) = \mathbf{r}(t_0)$  und  $\mathbf{r}(\sigma_1) = \mathbf{r}(t_1)$  einführen und würden exakt den gleichen Wert für  $W(\sigma_0, \sigma_1)$  erhalten.

## 2.2 Kinetische Energie

Es gibt nun zwei Perspektiven, von denen aus wir dieses Wegintegral betrachten können. Einmal sagt uns das 1. Axiom, dass der Kraft  $\mathbf{F}$  eine Beschleunigung  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$  entsprechen muss, also

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} dt m \langle \mathbf{a}(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} dt m \langle \ddot{\mathbf{r}}(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \langle \dot{\mathbf{r}}(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle = \frac{m}{2} |\mathbf{v}(t_1)|^2 - \frac{m}{2} |\mathbf{v}(t_0)|^2 . \quad (57)$$

**Definition.** Wir bezeichnen

$$T = \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 \quad (58)$$

als die kinetische Energie eines Körpers der Masse  $m$  und der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ .

Also entspricht der Arbeit an einem Körper einer Änderung seiner kinetischen Energie,

$$W(t_0, t_1) = T(t_1) - T(t_0) . \quad (59)$$

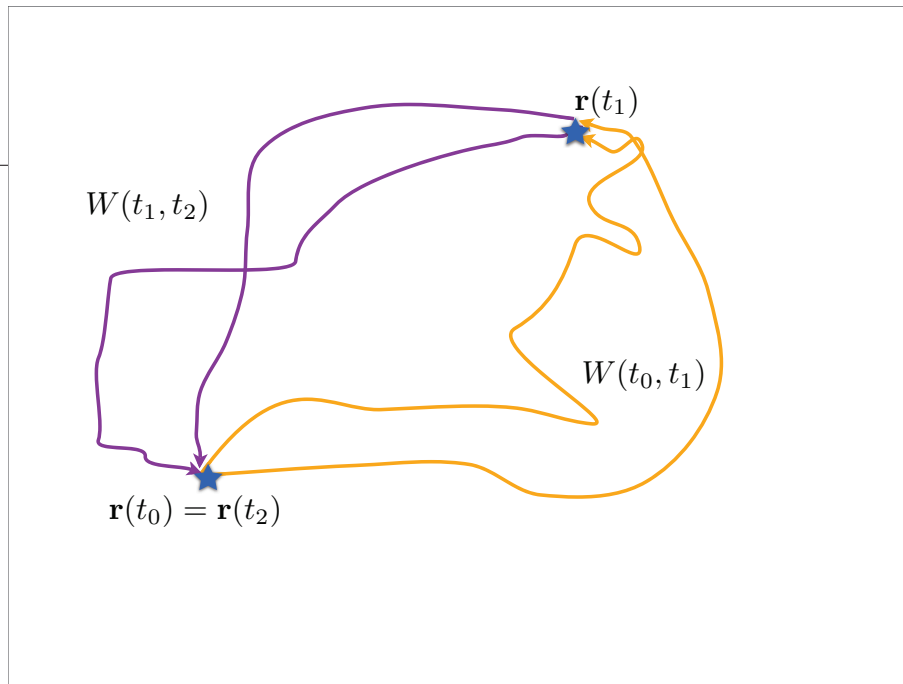
Die kinetische Energie wächst an, wenn die Kraft in Richtung der Bewegung wirkt, weil  $dT = \langle \mathbf{F}, d\mathbf{r} \rangle$ , und ist negativ im umgekehrten Fall. Deswegen wird die kinetische Energie eines Steins, der nach unten fällt, entlang der Trajektorie anwachsen.

## 2.3 Potenzielle Energie

Die Einführung von  $T$  hat keine Einzelheiten über das Kraftfeld benötigt. Das bringt uns zur zweiten Perspektive. Stellen wir uns eine geschlossene Trajektorie vor, die den Körper von  $\mathbf{r}_0$  nach  $\mathbf{r}_1$  bringt und dann von  $\mathbf{r}_1$  wieder nach  $\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_0$ . Die gesamte geleistete Arbeit ist in diesem Fall:

$$W(t_0, t_1) + W(t_1, t_2) = W(t_0, t_2) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_2} \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}), d\mathbf{r} \rangle . \quad (60)$$

Basierend auf Gl. (60) definiert man sich eine spezielle Klasse von Kraftfeldern.



**Definition.** Man bezeichnet Kraftfelder als konservativ, wenn die Integration über einen beliebigen geschlossenen Weg

$$\oint \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}), d\mathbf{r} \rangle = 0 \quad (61)$$

ergibt.

Die Bezeichnung “konservativ” erklärt sich dadurch, dass hiermit eine Erhaltungsgröße entlang der geschlossenen Trajektorie verbunden ist. Kehren wir also nach einer *beliebigen* Rundreise durch ein konservatives Kraftfeld zum ursprünglichen Ausgangspunkt  $\mathbf{r}_0$  zurück, dann wurde durch das Kraftfeld in der Summe keine Arbeit an dem Körper geleistet. Aus diesem Grund ist

$$W(t_0, t_1) = -W(t_1, t_2) . \quad (62)$$

Wir können deshalb jedem Raumpunkt eine skalare Größe zuordnen, die wir als *potenzielle Energie* bezeichnen. Diese ist bei  $\mathbf{r}$  die Arbeit, die das Feld verrichtet, um den Körper von einem Referenzpunkt  $\mathbf{r}_0$  nach  $\mathbf{r}$  zu bewegen. Weil dies wegunabhängig ist, ist diese wohldefiniert.

**Definition.** Für ein gegebenes konservatives Kraftfeld  $\mathbf{F}$  bezeichnen wir

$$U(\mathbf{r}_1) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}'), d\mathbf{r}' \rangle = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_0} \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}'), d\mathbf{r}' \rangle \quad (63)$$

als potenzielle Energie des Kraftfeldes  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  bei  $\mathbf{r}_1$  bezüglich des Referenzpunktes  $\mathbf{r}_0$ .

Die Differenz  $U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1)$  sagt uns, wieviel Arbeit verrichtet wird, wenn wir den Körper von  $\mathbf{r}_1$  nach  $\mathbf{r}_2$  transportieren. Diese Differenz ist die einzige hier physikalisch relevante Größe, weshalb auch die Wahl der Referenzpunktes unerheblich ist; Differenzen von  $U(\mathbf{r})$  sind unabhängig von  $\mathbf{r}_0$ . Das negative Vorzeichen für  $U$  wird hier gewählt, um sicherzustellen, dass die potenzielle Energie *zunimmt*, wenn die Kraft *entgegen* der Bewegungsrichtung wirkt.

## 2.4 Gesamtenergie

Vergleichen wir nun Gl. (59) und (63), dann finden wir

$$T(t_1) - T(t_0) = U(\mathbf{r}(t_0)) - U(\mathbf{r}(t_1)) \quad (64)$$

oder einfach den Erhaltungssatz der *Gesamtenergie*

$$\frac{m}{2} |\dot{\mathbf{r}}(t)|^2 + U(\mathbf{r}(t)) = E = \text{konst.} \quad (65)$$

$E$  bleibt also entlang der Trajektorie in einem konservativen Kraftfeld erhalten. Alle bekannten physikalischen Grundkräfte auf mikroskopischer (atomarer) Ebene sind konservativ. Makroskopische Phänomene wie Reibung können allerdings nicht-konservativ sein. Reibungskräfte sind geschwindigkeitsabhängig und wirken entgegen der Bewegungsrichtung.

## 2.5 Gradientendarstellung konservativer Kraftfelder

Wir wissen nun, wie das Potenzial  $U(\mathbf{r})$  von  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  abhängt. Aber wie bekommt man die konservative Kraft aus einem gegebenen Potenzial?

Hierfür sehen wir uns nochmal die Definition der potenziellen Energie an,

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}'), d\mathbf{r}' \rangle . \quad (66)$$

Mit einer beliebigen Parametrisierung  $\mathbf{r}'(\sigma)$  mit  $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{r}_0$  und  $\mathbf{r}'(\sigma_1) = \mathbf{r}$ , lautet dieses Wegintegral

$$U(\mathbf{r}(\sigma_1)) = - \int_0^{\sigma_1} \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}'(\sigma)), \frac{d\mathbf{r}'(\sigma)}{d\sigma} \rangle d\sigma . \quad (67)$$

Dies bedeutet aber, dass (Ableitung entlang der Kurve)

$$\frac{dU(\mathbf{r}(\sigma))}{d\sigma} = \langle \nabla U(\mathbf{r}(\sigma)), \frac{d\mathbf{r}(\sigma)}{d\sigma} \rangle = - \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}(\sigma)), \frac{d\mathbf{r}(\sigma)}{d\sigma} \rangle \quad (68)$$

oder dass

$$\langle \nabla U(\mathbf{r}(\sigma)) + \mathbf{F}(\mathbf{r}(\sigma)), \frac{d\mathbf{r}(\sigma)}{d\sigma} \rangle = 0 . \quad (69)$$

Zusätzlich wissen wir, dass dies für *alle Wege*  $\mathbf{r}(\sigma)$  gelten muss, die die Orte  $\mathbf{r}_0$  und  $\mathbf{r}$  verbinden, d.h. dies gilt für *beliebige* infinitesimale Wegstücke  $d\mathbf{r}$ ,

$$\langle \nabla U(\mathbf{r}) + \mathbf{F}(\mathbf{r}), d\mathbf{r} \rangle = 0 . \quad (70)$$

Die obige Gleichung ist dann aber nur erfüllbar, wenn

$$\nabla U(\mathbf{r}) + \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \iff \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) . \quad (71)$$

Das konservative Kraftfeld ist das Gradientenfeld des Potentials  $U(\mathbf{r})$ .

Zusätzlich finden wir noch als Bedingung eines konservatives Kraftfeldes

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \times \nabla U(\mathbf{r}) = 0 , \quad (72)$$

weil Gradientenfeldes rotationsfrei ist.

Die Operation  $\nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{x})$  ist die *Rotation* des Vektorfeldes  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ . In einer kartesischen Basis  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$  mit  $\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z$  ist dieser

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left( \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z) ; \quad (73)$$

die Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  sind hier nicht ortsabhängig, wohingegen es die Koordinaten  $F_i$  der Kraft i.A. sind. Die Rotationsfreiheit eines Gradientenfeldes  $\mathbf{F}$  folgt durch die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen.



**Anmerkung** Man betrachtet in diesem Zusammenhang auch zeitabhängige Felder  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ . In diesem Fall bezeichnet man  $\mathbf{F}$  dann als konservativ, wenn  $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = 0$  für alle Zeitpunkte  $t$ . Dies bedeutet aber, dass die Arbeit entlang eines geschlossenen Weges i.A. nur dann verschwindet, wenn das Kraftfeld für die Dauer der Bewegung entlang des Weges konstant auf  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t), t_0)$  gehalten wird (die Bewegung entlang der geschlossenen Kurve ist *virtuell*). Die tatsächliche Arbeit  $W(t_0, t_1) + W(t_1, t_2)$  durch das zeitveränderliche Feld kann aber von Null verschieden sein! Dennoch erhält man eine Potenzialdarstellung der Art  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\nabla U(\mathbf{r}, t)$ .

Reibungskräften lassen sich keine konservativen Kraftfelder zuordnen: Die Arbeit, die geleistet werden muss, um entlang eines Weges zum Ausgangspunkt zurückzukehren, hängt von der Weglänge und der Geschwindigkeit des Körpers entlang des Weges ab. Normalerweise kann man aber die Bewegung eines Körpers unter Berücksichtigung der Reibung durch Kombination von konservativen Kraftfeldern in und nicht-konservativen Reibungskräften beschreiben. In diesem Fall ist also die Gesamtenergie des Körpers nicht erhalten.

Dennoch wird das Prinzip der Energieerhaltung auf mikroskopischer Ebene nicht verletzt, weil die Reibung die reibenden Moleküle in (thermische) Bewegung versetzt. Berücksichtigt man deren Bewegung oder Wärme in der Energiebilanz erhält man ein allgemeineres Prinzip der Energieerhaltung. Dies ist also konzeptionell ein Vielteilchenproblem, das wir später besprechen werden.

Dies bedeutet wiederum nicht, dass es keine konservativen Kräfte gibt, die von der Geschwindigkeit abhängen, also  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ . Beispielsweise greift die Lorentz-Kraft  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , die von einer magnetischen Flussdichte  $\mathbf{B}$  auf ein geladenes Teilchen der elektrischen Ladung  $q$  ausgeübt wird, immer senkrecht zur Bewegungsrichtung an, d.h.  $P = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle = \langle q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \mathbf{v} \rangle = 0$ . Deshalb wird bei der Bewegung durch ein Magnetfeld *keine* Arbeit verrichtet: Die Arbeit entlang eines geschlossenen Weges ist trivialerweise immer null! Allerdings ist wegen der Geschwindigkeitsabhängigkeit die Beziehung zwischen einem Potenzial  $U(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  und der Kraft nun allgemeiner gegeben durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = -\nabla U(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \frac{d}{dt}(\nabla_{\mathbf{v}} U(\mathbf{r}, \mathbf{v})); \quad (74)$$

der Operator  $\nabla_{\mathbf{v}}$  bezeichnet den Gradienten bezüglich der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  und  $\frac{d}{dt}$  die totale zeitliche Ableitung entlang der Trajektorie  $\mathbf{r}(t)$ . Diese Beziehung ergibt sich aus den Maxwellgleichungen und wird

im Detail später in der Theoretischen Elektrodynamik hergeleitet. Wir möchten hier nur noch erwähnen, dass das Potenzial der Lorentz-Kraft durch  $U(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = -q\langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle$  gegeben ist. Das Vektorpotenzial der magnetischen Flussdichte ist durch  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  definiert.

## 2.6 Das Newtonsche Gravitationsgesetz

Nach Isaac Newton ist die Gravitationskraft (Zentralkraft)konservativ mit dem Potenzial

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{Gm_1m_2}{r}, \quad (75)$$

wobei  $m_1$  und  $m_2$  die Massen der gravitativ wechselwirkenden Körper sind und  $r := |\mathbf{r}|$  deren Abstand;  $G = 6.67384 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^2$  ist die Gravitationskonstante, die die Stärke der gravitativen Wechselwirkung bestimmt.

Dass dieses tatsächlich die diskutierte Zentralkraft der Ellipsenbewegung ergibt, sieht man anhand

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} U(\mathbf{r}) = -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) = Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{1}{r^2} = Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (76)$$

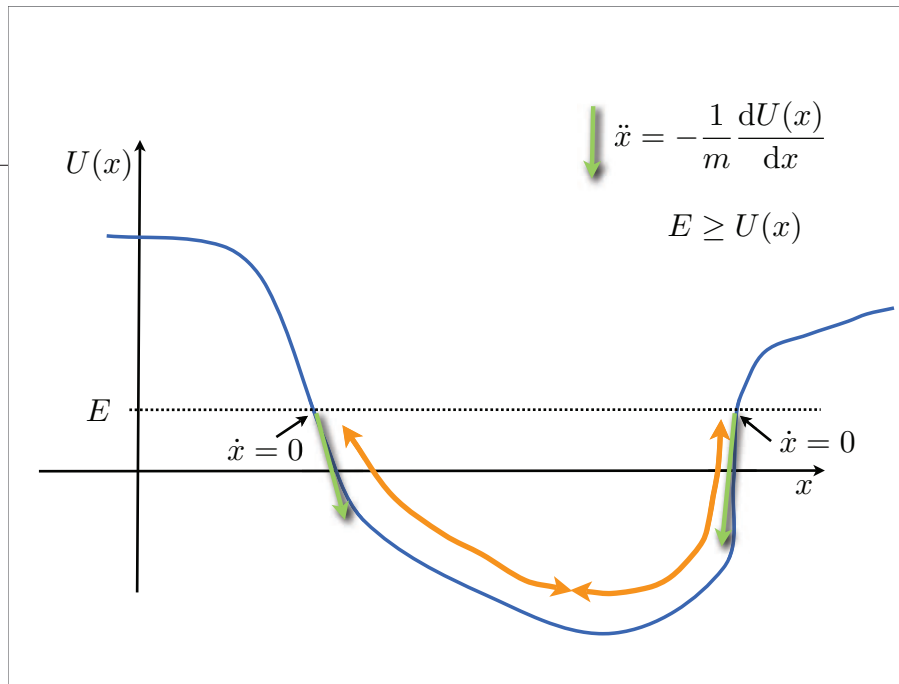
Hier haben wir im Zwischenschritt die Darstellung des Gradienten in Kugelkoordinaten für den *eingeschränkten Fall* einer reinen  $r$ -Abhängigkeit benutzt:

$$\nabla f(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial f(r)}{\partial r}. \quad (77)$$

## 2.7 Eindimensionale Bewegung

Die Erhaltung der Gesamtenergie können wir in besonderen Fällen verwenden, um die Bewegungsgleichung  $\mathbf{r}(t)$  eines Körpers explizit als Integral anzugeben. Man bezeichnet ein solches System als *integrabel*. Beachte, dass wir damit nicht notwendigerweise meinen, wir können das Integral oder die Integrale analytisch lösen! Alleine der Umstand, Trajektorien eines oder mehrerer Teilchen als Integral(e) schreiben zu können, ist schon etwas besonders. Wir kommen darauf später nochmal zurück.

Systeme sind auf jeden Fall immer integrabel, wenn wir ein einziges Teilchen betrachten, dass sich nur entlang einer Richtung  $e_x$  bewegen kann. In diesem Fall kann die Kraft auch nur entlang  $e_x$  wirken, so



dass wir diese *immer* als Gradient eines Potentials  $U(x)$  schreiben können,  $\mathbf{F}(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \mathbf{e}_x$ . Deswegen ist dieses Kraftfeld auch für diese eingeschränkte Bewegung immer konservativ.

Man denke hier z.B. an die Bewegung eines Steins im erdnahen Gravitationsfeld. Hier ist die wirkende Kraft ungefähr konstant,  $\mathbf{F}(x) = -mge_x$ , für einen senkrecht nach oben zeigenden Vektor  $\mathbf{e}_x$ . Das entsprechende Potenzial ist  $U(x) = mgx$ . Zwar ist die Trajektorie eines Teilchens in diesem Feld allgemein dreidimensional, aber wir können – wie schon besprochen – immer einen Beobachter finden, für den das Teilchen nur nach unten entlang  $\mathbf{e}_x$  fällt. Das ist dann eine eindimensionale Bewegung!

Für eindimensionale Systeme mit einem Freiheitsgrad  $x$  gilt wegen der Energieerhaltung

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 + U(x) = E . \quad (78)$$

oder

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)} . \quad (79)$$

Die Geschwindigkeit  $\dot{x}$  ist bis auf das Vorzeichen direkt durch den Ort  $x$  gegeben. Das positive Vorzeichen ist zu wählen, wenn sich das Teilchen gerade zu größeren  $x$  bewegt und vice versa. Außerdem kann ein

Teilchen niemals Bereiche von  $x$  erreichen, bei denen  $U(x) > E$  wird; hier wäre  $\dot{x}^2 < 0$ . Deshalb markieren die Punkte  $x_0$  mit  $U(x_0) = E$  entweder

- Ruhepunkte eines Teilchens, d.h.  $\dot{x} = 0$  und  $\ddot{x} = 0$ , d.h.  $dU(x)/dx = 0$ ,
- oder Umkehrpunkte, d.h.  $\dot{x} = 0$  und  $\ddot{x} \neq 0$ , an denen das Teilchen seine Richtung ändern muss; hier ist dann das Vorzeichen von “ $\pm$ ” zu wechseln.  $U(x_0) = E$  kann kein Ruhepunkt sein, wenn der Gradient von  $U(x)$  bei  $x = x_0$  nicht verschwindet.

Wir wollen hier nun nur Fälle betrachten, für die die Bewegung nur in eine Richtung läuft, d.h.  $\dot{x} \geq 0$  oder  $\dot{x} \leq 0$ . Wir definieren die Orientierung von  $e_x$  so, dass  $\dot{x} \geq 0$ . Dadurch ist

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\dot{x}}{\sqrt{E - U(x)}} = 1 \quad (80)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt \dot{x}}{\sqrt{E - U(x)}} = \int_{t_0}^{t_1} dt \quad (81)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = t_1 - t_0 . \quad (82)$$

Der letzte Schritt auf der linken Seite ist formal eine Variablentransformation  $t \mapsto t(x)$ , die man häufig etwas salopp durch  $dt \dot{x} = dt dx/dt = dx$  mit entsprechender Änderung der Integralgrenzen notiert. Entsprechend dieser Notation sieht man deshalb häufig die praktischen Rechenschritte

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)} \quad (83)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = dt \quad (84)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 , \quad (85)$$

die zum gleichen Ergebnis

$$t_1 = t_0 + \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (86)$$

führen. Durch Integration des Ausdrucks auf der rechten Seite erhalten wir  $t(x)$ , was durch Invertierung auf  $x(t)$  führt.

Dieses Problem ist also prinzipiell als “einfaches” Integral und einer *Integrationskonstanten*  $E$ , der Gesamtenergie, darstellbar. Das mag zwar im konkreten Falle ein schwieriges mathematisches Problem oder sogar analytisch unlösbar sein, aber viele Probleme, die nicht eindimensional sind, erlauben nicht einmal diese Art der Darstellungen der Lösungen: Sie sind nicht integrierbar.

Zurück zu unserem ursprünglichen Beispiel. Wir betrachten die Phase, in der der Stein nach unten fällt, d.h.  $\dot{x} < 0$ . Wir finden für den fallenden Stein mit  $t_0 \equiv 0$ ,  $t_1 = t$ ,  $x_1 = x$  und  $x_0 \equiv 0$ :

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{E/mg - x}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left( 2\sqrt{E/mg - x} \right) \Big|_0^x = \sqrt{\frac{2}{g}} \left( \sqrt{E/mg - x} - \sqrt{E/mg} \right) \quad (87)$$

oder

$$x = -\frac{g}{2}t^2 - \sqrt{\frac{2E}{m}}t. \quad (88)$$

Das ist natürlich die Bewegungsgleichung einer konstanten Beschleunigung  $g$  mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = \sqrt{2E/m}$ .

### 3 Vielteilchensysteme

Wir möchten nun die vorangegangenen Überlegungen hinsichtlich der Bewegungsgleichung eines Teilchens auf Systeme mit  $N$  Körpern erweitern. Wir stellen uns vor, dass diese Körper wiederum Punktmassen sind. Jeder Körper folgt seiner eigenen Trajektorie  $\mathbf{r}_i(t) \in V^3$  und hat seine eigene träge Masse  $m_i$ .

Wir könnten jetzt die Bewegungsgleichung jedes Körpers separat betrachten und nur noch die eventuell vorhandenen Wechselwirkungen zwischen den Körpern berücksichtigen. Dies würde eine ganze Menge Schreibarbeit bedeuten, weshalb man das gesamte System formal in einen neuen Raum einbettet. Statt  $N$  Ortsvektoren erhalten wir einen kombinierten Ortsvektor, statt  $N$  Kraftvektoren erhalten wir nur einen etc. Aus atomistischer Sicht sind alle makroskopischen Objekte extreme Vielteilchensysteme: Sie bestehen aus  $\sim 10^{23}$  Molekülen, welche jeweils wiederum wenige wechselwirkende Atome umfassen. Die folgenden Überlegungen deuten aber an, dass man diese Systeme makroskopisch als relativ einfache Körper mit wenigen Freiheitsgraden betrachten kann!

Um die  $N$  Körper formal in einem Vektor zusammenzufassen, definieren wir

$$\mathbf{z}(t) = (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \dots, \mathbf{r}_N(t)) \quad (89)$$

als Bahnkurve  $\mathbf{z}(t) \in Z$  im *Konfigurationsraum*

$$Z = V^3 \oplus \dots \oplus V^3 \text{ (Ursprung } \mathcal{O} \text{)}. \quad (90)$$

Dieser Raum erhält dadurch eine Vektorraumstruktur, dass wir unter einer Verknüpfung  $a\mathbf{z}^{(1)} + b\mathbf{z}^{(2)}$  von  $\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)} \in Z$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  folgendes verstehen:

$$a\mathbf{z}^{(1)} + b\mathbf{z}^{(2)} := (a\mathbf{r}_1^{(1)} + b\mathbf{r}_1^{(2)}, \dots, a\mathbf{r}_N^{(1)} + b\mathbf{r}_N^{(2)}). \quad (91)$$

Wir verknüpfen also nur Vektorkomponenten, die das gleiche Teilchen betreffen. Desweiteren gibt es noch ein neutrales Element  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$  und ein inverses Element  $-\mathbf{z} = (-\mathbf{r}_1, \dots, -\mathbf{r}_N)$  für jeden Vektor  $\mathbf{z}$ . Die Dimension des Konfigurationsraums ist  $\dim(Z) = N \cdot \dim E^3 = 3N$ . Beachte, dass durch diese

Formalisierung automatisch eine komponentenweise Ableitung oder Integration wie in

$$\frac{dz}{d\alpha} = \left( \frac{dr_1}{d\alpha}, \dots, \frac{dr_N}{d\alpha} \right), \quad (92)$$

$$\int d\alpha z = \left( \int d\alpha r_1, \dots, \int d\alpha r_N \right), \quad (93)$$

gegeben ist. Desweiteren definieren wir für den Konfigurationsraum ein Skalarprodukt  $\langle v, w \rangle_z : Z \times Z \mapsto \mathbb{R}$ , gegeben durch

$$\langle z^{(1)}, z^{(2)} \rangle_z := \sum_{i=1}^N \langle r_i^{(1)}, r_i^{(2)} \rangle. \quad (94)$$

Hierdurch wird  $Z$  auch zu einem metrischen affinen Raum.

Wir fassen alle Kräfte  $F_i$ , die auf die Körper  $i$  wirken in einer Produktkraft  $F_z(z) \in Z$  zusammen:

$$F(z) = (F_1(z), \dots, F_N(z)). \quad (95)$$

Die Kraft  $F_i(z)$  auf das  $i$ te Teilchen hängt i.A. von den Positionen aller anderen Teilchen ab. Wir betrachten hier im Weiteren Kräfte, die *nur* vom Ort und nicht den Geschwindigkeiten oder explizit der Zeit  $t$  abhängen.

Die Bewegungsgleichungen aller  $N$  Teilchen werden also nun elegant zusammengefasst durch

$$\frac{d^2}{dt^2} (m \odot z(t)) = F(z(t)) \quad ; \quad m \odot w := (m_1 w_1, \dots, m_N w_N). \quad (96)$$

Das gesamte System bewegt sich als eine Trajektorie  $z(t)$  durch  $Z$ . Dies ist immer noch eine Differentialgleichung 2. Ordnung, aber nun mit  $3N$  Freiheitsgraden. Folglich benötigen wir  $3N$  Positionen und  $3N$  Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt  $t$ , also  $6N$  Konstanten, um ein Anfangswertproblem eindeutig zu lösen.

### 3.1 Erhaltung der Gesamtenergie

Unter der Arbeit des gesamten  $N$ -Körper-Systems entlang der Kurve  $z(t)$  verstehen wir die Summe aller Teilarbeiten der Körper, nämlich

$$W(z_0, z_1) = \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^{t_1} dt \langle F_i(z(t)), \dot{r}_i(t) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} dt \langle F_z(z(t)), \dot{z}(t) \rangle_z = \int_{z_0}^{z_1} \langle F_z(z), dz \rangle_z. \quad (97)$$

Durch unsere geeignete Definition des Skalarprodukts in  $Z$  wird die Arbeit entlang der  $N$ -Körper-Kurve ein Wegintegral in  $Z$  entlang der Kurve  $z(t)$ .

Die mathematische Struktur des Raumes ist vergleichbar mit dem Fall eines einzelnen Körpers. Deswegen greift auch hier unsere vorherige Argumentation hinsichtlich konservativer Felder. Hängt nun die gesamte Arbeit des Systems nicht vom Weg einer beliebigen geschlossenen Kurve  $C$  in  $Z$  ab,

$$\oint_C \langle \mathbf{F}_z(z), dz \rangle_z = 0, \quad (98)$$

dann gibt es ein Potenzial  $U(z)$ , für das gilt:

$$\mathbf{F}_z(z) = -\nabla U(z) ; \quad \nabla U(z) := (\nabla_1 U(z), \dots, \nabla_N U(z)) ; \quad W(z_0, z_1) = U(z_0) - U(z_1). \quad (99)$$

Hier verstehen wir unter

$$\nabla_i := \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y_i} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z_i} \mathbf{e}_z \quad (100)$$

den Gradienten bezüglich des Ortvektors  $\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{e}_x + y_i \mathbf{e}_y + z_i \mathbf{e}_z$  des  $i$ ten Körpers, und unter  $\nabla$  den Gradienten im Raum  $Z$ . Ein geschlossener Weg  $z(t)$  bedeutet, dass sich *alle* Teilchen zum Ausgangspunkt zurückbewegen. Die wichtige Schlussfolgerung ist hier, dass wir im Falle der konservativen Felder  $\mathbf{F}_i$  ein Skalarpotenzial  $U(z)$  des gesamten Systems finden können!

Wir finden noch mehr. Zusätzlich ergibt sich wieder, dass sich die Arbeit entlang der Kurve  $z(t)$  durch die Differenz der gesamten kinetischen Energie des Systems an den Endpunkten der  $N$ -Teilchen-Kurve ausdrücken läßt:

$$W(t_0, t_1) = \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^{t_1} dt m_i \langle \dot{\mathbf{r}}_i(t), \dot{\mathbf{r}}_i(t) \rangle = \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \dot{\mathbf{r}}_i(t), m_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) \rangle \quad (101)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \dot{z}(t), m \odot \dot{z}(t) \rangle_z = T(t_1) - T(t_0) \quad (102)$$

Die gesamte kinetische Energie des Systems ist also

$$T := \frac{1}{2} \langle \dot{z}, m \odot \dot{z} \rangle_z = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} |\dot{\mathbf{r}}_i|^2. \quad (103)$$

Also gilt nach wie vor für konservative Kraftfelder, dass

$$T(t_1) - T(t_0) = W(t_0, t_1) = U(z(t_0)) - U(z(t_1)), \quad (104)$$



und wir erhalten eine schöne Verallgemeinerung der Energieerhaltung für  $N$ -Körper-Systeme:

$$T(t) + U(\mathbf{z}(t)) = E = \text{konst.} . \quad (105)$$

Die Summe *aller* kinetischen und potenziellen Energien des Systems ist also eine Konstante entlang der Bahn  $\mathbf{z}(t)$ .

### 3.2 Innere und äußere Kräfte

Wir unterscheiden zwischen *inneren Kräften*  $\mathbf{F}^{(i)}$  und *äußeren Kräften*  $\mathbf{F}^{(a)}$ . Eine äußere Kraft  $\mathbf{F}_j^{(a)}(\mathbf{r}_j)$ , die auf den  $j$ ten Körper wirkt, hängt nur vom Ort dieses einzelnen Körpers,  $\mathbf{r}_j$ , ab. Eine innere Kraft  $\mathbf{F}^{(i)}(\mathbf{z})$  hängt auch von den Orten aller anderen Teilchen ab, also im Allgemeinen von der Konfiguration  $\mathbf{z}$ . Betrachten wir beispielsweise einen makroskopischen Körper wie einen Stein, dann sind die Kräfte, die zwischen den Molekülen des Steines wirken, innere Kräfte (im Wesentlichen elektrische), wohingegen die Schwerkraft der Erde auf die Steinmoleküle äußeren Kräften zugeordnet werden.

Es zeigt sich, dass innere Kräfte normalerweise reine Zweiteilchenwechselwirkungen sind, die nur vom Abstand  $|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|$  zweier Teilchen  $k$  und  $l$  abhängen. Hierdurch kann man das Vielteilchenpotenzial allgemein schreiben als

$$U(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^N U_k^{(a)}(\mathbf{r}_k) + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{k-1} U_{kl}^{(i)}(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|) = \sum_{k=1}^N U_k^{(a)}(\mathbf{r}_k) + \frac{1}{2} \sum_{k \neq l}^N U_{kl}^{(i)}(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|) . \quad (106)$$

Hier bezeichnet  $U_k^{(a)}(\mathbf{r})$  das äußere Potenzial, das auf Teilchen  $k$  wirkt, und  $U_{kl}^{(i)}(r)$  ist das innere Potenzial der Kraft zwischen den Teilchen  $k$  und  $l$  mit Abstand  $r$ . Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass die inneren Potenziale nur vom Abstand abhängen: Wir können  $\mathbf{r}_k$  und  $\mathbf{r}_l$  vertauschen, ohne das Potenzial zu verändern. Das Potenzial ist demnach normalerweise nach Einteilchen- und Zweiteilchenwechselwirkungen separierbar.

Als einfaches Beispiel betrachte ein System zweier Teilchen,  $N = 2$ , die gravitativ gebunden sind, und auf das keine äußeren Kräfte wirken,

$$U(\mathbf{z}) = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} . \quad (107)$$

Alle im System wirkenden Kräfte sind also (Hinweis: Kettenregel):

$$\mathbf{F}_z(\mathbf{z}) = -\nabla U(\mathbf{z}) = (\mathbf{F}_1(\mathbf{z}), \mathbf{F}_2(\mathbf{z})); \quad (108)$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{z}) = -\nabla_1 U(\mathbf{z}) = Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}; \quad (109)$$

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{z}) = -\nabla_2 U(\mathbf{z}) = Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}; \quad (110)$$

Wir finden demnach  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ , was nach dem 3. Axiom notwendigerweise in einem Zweiteilchensystem ohne äußeren Kräfte erfüllt sein muss!

### 3.3 Gesamtimpuls

Der Impuls eines Partikels ist  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . Das 1. Axiom sagt uns, dass dieser erhalten bleibt, wenn keine resultierenden Kräfte auf dieses Teilchen wirken, also  $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}(t)$  oder  $\dot{\mathbf{p}} = 0$  für alle  $t$ . Dies führt zu einer gleichförmigen Bewegung, weil  $\mathbf{v}$  konstant bleibt (wenn  $m$  konstant). Wir fragen uns nun, ob es eine ähnliche Relation für Vielteilchensysteme gibt, wenn keine äußeren Kräfte auf diese wirken.

Da wir das System als Ganzes diskutieren wollen, definieren wir uns die (erhaltene) *Gesamtmasse*

$$M := \sum_{i=1}^N m_i. \quad (111)$$

Nun betrachten wir den *Gesamtimpuls*  $\mathbf{P}$ ,

$$\mathbf{P} := \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = M \frac{d}{dt} \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M} =: M \dot{\mathbf{R}}, \quad (112)$$

und beobachten, dass wir diesem ein hypothetisches Partikel zuordnen können, das die Masse  $M$  besitzt und sich entlang der Orte des *Massenschwerpunkts*

$$\mathbf{R} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad (113)$$

bewegt. Der Massenschwerpunkt ist das gewichtete Mittel aller Orte  $\mathbf{r}_i$  mit dem Gewicht  $m_i/M$ . Offensichtlich ist ein System mit  $N = 1$  Partikeln nur ein Sonderfall dieser Betrachtung; dann wäre  $M = m_1$  und  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1$ .

Wie verändert sich die Bahn des Schwerpunktes, wenn innere und äußere Kräfte wirken? Dazu sehen wir uns die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses an:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\ddot{\mathbf{R}} = \sum_{k=1}^N m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_{k=1}^N \left( \mathbf{F}_k^{(a)} + \sum_{l=1, l \neq k}^N \mathbf{F}_{kl}^{(i)} \right). \quad (114)$$

Hier sind  $\mathbf{F}_k^{(a)}$  die äußere Kraft auf das  $k$ te Teilchen und  $\mathbf{F}_{kl}^{(i)}$  die innere Kraft die von Teilchen  $l$  auf Teilchen  $k$  ausgeübt wird. Wir wissen nun aber aufgrund des 3. Axioms, dass  $\mathbf{F}_{kl}^{(i)} = -\mathbf{F}_{lk}^{(i)}$  sein muss. Deshalb müssen sich alle Summanden in

$$\sum_{l=1, l \neq k}^N \mathbf{F}_{kl}^{(i)} = 0 \quad (115)$$

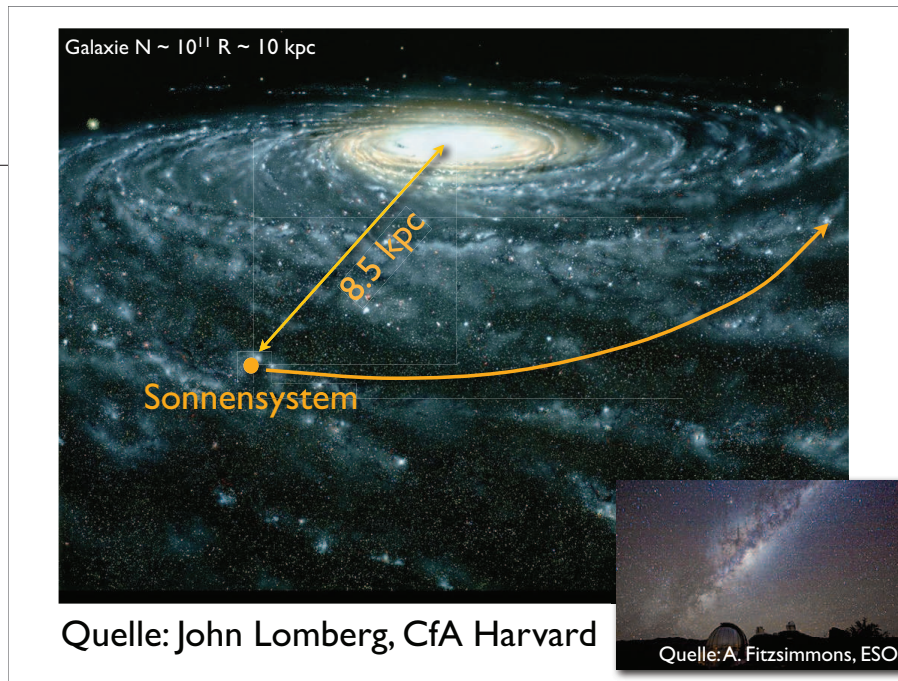
immer gegenseitig aufheben. Also ist

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{(a)} =: \mathbf{F}^{(a)} \quad (116)$$

die Änderung des Gesamtimpulses die Summe  $\mathbf{F}^{(a)}$  aller äußeren Kräfte – egal, wie komplex die vielfältigen Wechselwirkungen der Teilchen untereinander sind.

Bedenke, dass ein makroskopischer Körper aus  $\sim 10^{23}$  Molekülen besteht, die alle miteinander wechselwirken. Sind diese inneren Kräfte stark genug und das System stabil genug, dass sich die Abstände,  $|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l| = \text{konst.}$ , der Moleküle untereinander makroskopisch nicht merklich verändern, dann wird sich das gesamte System starr entlang der Massenschwerpunkt-Trajektorie bewegen. Das ist aber genau das, was wir in unserer alltäglichen Erfahrung mit festen Körpern erleben! Diese *starrten Körper* werden wir später noch genauer behandeln.

Außerdem basiert unsere Punktteilchen-Näherung auf genau diesem Verhalten. Auch wenn etwa Planeten und die Sonne nicht punktförmig sind, können wir sie praktisch immer, ohne allzu große Fehler zu machen, als punktförmig idealisieren, um die Planetenbewegung zu beschreiben. Ebenso können wir das gesamte Sonnensystem als punktförmig approximieren, wenn wir dessen Bewegung um das galaktische Zentrum beschreiben wollen. Oder ganze Galaxien als Punktmassen, um die Dynamik von vielen Galaxien zu beschreiben, wenn diese sich nicht zu nahe kommen.



Wenn sich alle äußeren Kräfte zusammen aufheben oder keine äußeren Kräfte vorhanden sind (*abgeschlossenes System*), dann bewegt sich der Massenschwerpunkt also gleichförmig. In diesem Fall ist es sinnvoll, zur mathematischen Beschreibung ein Beobachtersystem zu wählen, in dem der Massenschwerpunkt in Ruhe ist. Wir machen also eine Galilei-Transformation mit  $\Delta \mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}$  und  $\Delta \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{R}(t_0)$ .

**Definition.** In einem Schwerpunktsystem ohne äußere Kräfte ruht der Massenschwerpunkt im Ursprung, d.h.

$$\mathbf{R}' = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = 0 ; \quad M \dot{\mathbf{R}}' = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i = 0 . \quad (117)$$

Insbesondere verschwindet in diesem Inertialsystem der Gesamtimpuls (rechts). Für die Beschreibung eines Systems ist das Schwerpunktsystem häufig die bevorzugte Wahl, weil hier die Trajektorien einfacher werden.

**Anmerkung** Außerdem folgt, dass zwei getrennte Systeme mit separatem  $(M_1, \dot{\mathbf{R}}_1)$  und  $(M_2, \dot{\mathbf{R}}_2)$  zusammen den Gesamtimpuls  $M_1 \dot{\mathbf{R}}_1 + M_2 \dot{\mathbf{R}}_2$  besitzen sowie den gemeinsamen Schwerpunkt

$$\mathbf{R} = \frac{M_1 \mathbf{R}_1 + M_2 \mathbf{R}_2}{M_1 + M_2}. \quad (118)$$

Der gemeinsame Schwerpunkt von Erde ( $M_1 \approx 6 \times 10^{24}$  kg;  $R_1 := 0$ ) und Mond ( $M_2 \approx 7 \times 10^{22}$  kg;  $R_2 \approx 3.8 \times 10^5$  km) liegt also mit  $R \approx 4400$  km innerhalb des Erdradius von  $\approx 6370$  km.

### 3.4 Gesamtdrehimpuls

**Definition.** *Unter*

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (119)$$

*verstehen wir den Drehimpuls einer Punktmasse.*

Ebenso wie der Impuls  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  ist dieser erhalten, wenn keine Kraft  $\mathbf{F}$  auf das Teilchen wirkt, weil

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = m\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times (m\dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0. \quad (120)$$

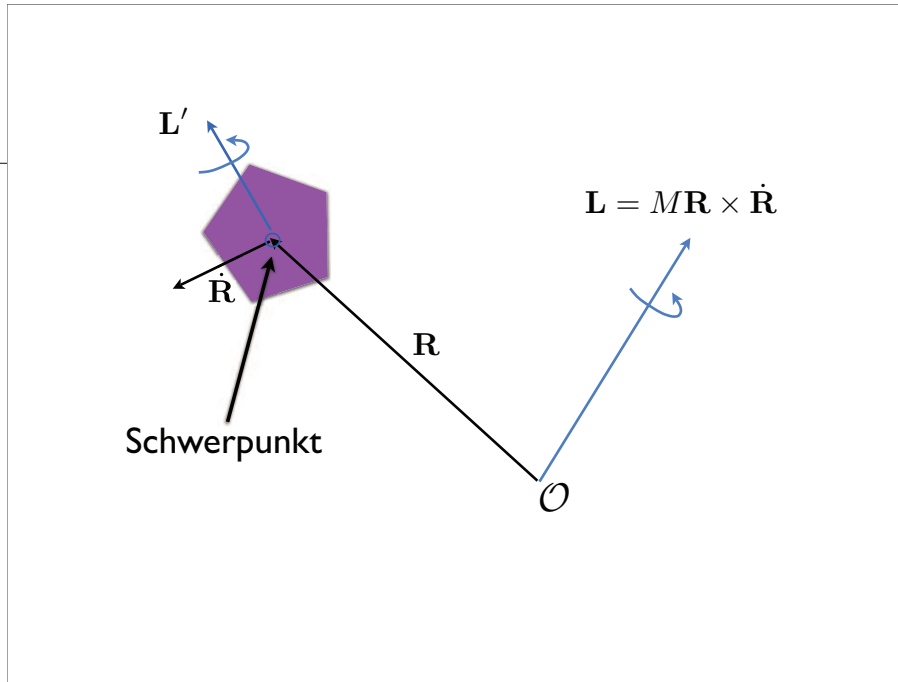
Die Größe  $\mathbf{n} := \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  ist das *Drehmoment*, das im kräftefreien Fall offensichtlich verschwindet. In diesem Fall ist  $\mathbf{l}$  genau wie  $\mathbf{p}$  eine Erhaltungsgröße. Im Gegensatz zum Impuls  $\mathbf{p}$  ist der Drehimpuls aber nur empfindlich für Kräfte, die senkrecht zu  $\mathbf{r}$  wirken. Demnach ist  $\mathbf{l}$  erhalten bei einem Zentralkraftproblem, in dem die Kraft immer entlang  $\mathbf{r}$  wirkt, obwohl  $\mathbf{p}$  nicht erhalten ist. Weiterhin ist  $\mathbf{l}$  im Gegensatz zum Impuls explizit abhängig von der Definition des Ursprungs  $O$  des  $E^3$ , weil eine Verschiebung  $\Delta\mathbf{r}$  den Wert um

$$\mathbf{l}' = m(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) \times \mathbf{v} = \mathbf{l} + \Delta\mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (121)$$

ändert. Übrigens ist  $\mathbf{n}' = \dot{\mathbf{l}} \neq 0$ , selbst wenn die Kraft parallel zu  $\mathbf{r}$  ist, da i.A.  $\Delta\mathbf{r} \times \mathbf{F} \neq 0$ .

Wir sehen uns nun den *Gesamtdrehimpuls* eines Vielteilchensystems an:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \quad (122)$$



Bezeichnen wir  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R}$  und  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \dot{\mathbf{R}}$  durch Orte und Geschwindigkeiten im Schwerpunktsystem, dann finden wir nun:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}) \times (\mathbf{v}'_i + \dot{\mathbf{R}}) \quad (123)$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{R}} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R} \times \mathbf{v}'_i + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} \quad (124)$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i + 0 \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times 0 + M \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} \quad (125)$$

$$= \mathbf{L}' + M \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}. \quad (126)$$

Der Gesamtdrehimpuls ist die Summe aus Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{L}'$  im Schwerpunktsystem und dem Drehimpuls, den wir erhalten, wenn wir das System als Punktmasse mit  $M$ , Ort  $\mathbf{R}$  und Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{R}}$  betrachten.

Die zeitliche Ableitung dieses Ausdrucks gibt das Gesamtdrehmoment, das auf das System wirkt,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}'}{dt} + \mathbf{R} \times (M\ddot{\mathbf{R}}) = \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\mathbf{r}}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i + \mathbf{r}'_i \times \ddot{\mathbf{r}}'_i) + \mathbf{R} \times \mathbf{F}^{(a)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{N}^{(a)}. \quad (127)$$

Der rechte Term entspricht dem Drehmoment  $\mathbf{N}^{(a)} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}^{(a)}$ , das alle äußeren Kräfte zusammen auf den Massenschwerpunkt ausüben. Der linke Term ist die Summe aller Drehmomente auf die Teilchen im Schwerpunktsystem, dadurch dass auf das  $i$ te Teilchen die resultierende Kraft  $\mathbf{F}_i$  ausgeübt wird. Wir können das Drehmoment im Schwerpunktsystem weiter vereinfachen,

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{k=1}^N \mathbf{r}'_k \times \left( \mathbf{F}_k^{(a)} + \sum_{l=1, l \neq k}^N \mathbf{F}_{kl}^{(i)} \right) \quad (128)$$

$$= \sum_{k=1}^N \mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k^{(a)} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq l}^N (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_{kl}^{(i)} + \mathbf{r}'_l \times \mathbf{F}_{lk}^{(i)}) \quad (129)$$

$$= \sum_{k=1}^N \mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k^{(a)} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq l}^N (\mathbf{r}'_k - \mathbf{r}'_l) \times \mathbf{F}_{kl}^{(i)} \quad (130)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^N \mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k^{(a)}, \quad (131)$$

wenn (\*) die inneren Kräfte zwischen zwei Teilchen  $k$  und  $l$  parallel zum Verbindungsvektor  $\mathbf{r}'_k - \mathbf{r}'_l$  sind, d.h.  $(\mathbf{r}'_k - \mathbf{r}'_l) \times \mathbf{F}_{kl}^{(i)} = 0$ . Dies ist “in allen praktischen Fällen” gegeben [2]. Dann sind für das Gesamtdrehmoment also die *inneren Kräfte irrelevant*, und wir finden:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{k=1}^N \mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k^{(a)} + \mathbf{N}^{(a)} =: \mathbf{N}^{(a)'} + \mathbf{N}^{(a)}. \quad (132)$$

Mit  $\mathbf{N}^{(a)'}$  bezeichnen wir die Summe aller äußeren Drehmomente im Schwerpunktsystem.

Interessanterweise gilt  $\mathbf{N}' = \dot{\mathbf{L}}' = \mathbf{N}^{(a)'}$  in *jedem* Beobachtersystem, bei dem der Massenschwerpunkt im Ursprung  $O$  ruht; also auch in Nicht-Inertialsystemen (beschleunigten Bezugssystemen)! Eine Beweis hierfür kann man z.B. in [3] finden.

### 3.5 Virialsatz

Wir sehen uns nun zeitlich gemittelte Größen eines Vielteilchensystems mit Potenzial  $U(\mathbf{z})$  an, um zu sehen, ob wir allgemeine statistische Aussagen machen können. Alle Teilchenimpulse des System fassen wir als Vektor im Konfigurationsraum  $Z$  zusammen,

$$\mathbf{p} := (m \odot \dot{\mathbf{z}}) = (m_1 \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, m_N \dot{\mathbf{r}}_N). \quad (133)$$

Das ist *nicht* der Gesamtdrehimpuls, sondern eine vektorielle Liste aller Einzelimpulse. Die gesamte kinetische Energie  $T$  des Systems ist nach Gl. (103) also

$$2T = \langle \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{p} \rangle_z = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle_z - \langle \mathbf{z}, \dot{\mathbf{p}} \rangle_z = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle_z - \langle \mathbf{z}, \mathbf{F}_z(\mathbf{z}) \rangle_z = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle_z + \langle \mathbf{z}, \nabla U(\mathbf{z}) \rangle_z \quad (134)$$

oder

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle_z = 2T - \langle \mathbf{z}, \nabla U(\mathbf{z}) \rangle_z . \quad (135)$$

Haben wir nun ein *periodisches* System, das nach jeder Periode  $\Delta t$  exakt in seinen Ausgangszustand zurückkehrt, dann muss gelten

$$\langle \mathbf{z}(t), \mathbf{p}(t) \rangle_z = \langle \mathbf{z}(t + \Delta t), \mathbf{p}(t + \Delta t) \rangle_z . \quad (136)$$

Wir definieren als Mittelwert einer Periode  $\Delta t$  der Funktion  $f(t)$ :

$$\overline{f(t)}^{\Delta t} := \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0 - \Delta t/2}^{t_0 + \Delta t/2} dt' f(t') . \quad (137)$$

Der Bezugszeitpunkt  $t_0$  ist hier unerheblich, weil ein periodisches System für jedes  $t$  nach jedem Zeitraum  $\Delta t$  in den Ursprungszustand zurückkehrt. Wir finden nun für Gl. (135) als Mittelwert

$$\overline{\frac{d}{dt} \langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle_z}^{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left( \langle \mathbf{z}(t + \Delta t/2), \mathbf{p}(t + \Delta t/2) \rangle_z - \langle \mathbf{z}(t - \Delta t/2), \mathbf{p}(t - \Delta t/2) \rangle_z \right) \quad (138)$$

$$= 0 \quad (139)$$

$$= 2\overline{T}^{\Delta t} - \overline{\langle \mathbf{z}, \nabla U(\mathbf{z}) \rangle_z}^{\Delta t} , \quad (140)$$

und damit den sogenannten

**Virialsatz.**

$$\overline{T}^{\Delta t} = \frac{1}{2} \overline{\langle \mathbf{z}, \nabla U(\mathbf{z}) \rangle_z}^{\Delta t} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \overline{\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i(\mathbf{z}) \rangle}^{\Delta t} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \overline{\langle \mathbf{r}_i, \nabla_i U(\mathbf{z}) \rangle}^{\Delta t} . \quad (141)$$

Dieses Schmuckstück der statistischen Physik wurde von Rudolf J.E. Clausius (\*1822-†1888) entdeckt; er lebte übrigens von 1869 bis zu seinem Tode im damals preußischen Bonn. Der Satz macht eine direkte Aussage über den Mittelwert einer Periode der kinetischen Energie (links) eines Systems im Vergleich zum Mittelwert des sogenannten Virials (rechts), das direkt mit der potenziellen Energie verknüpft ist.



In dieser Form ist der Virialsatz strikt gültig, setzt aber ein periodisches System voraus. Im Allgemeinen ist ein periodisches System mit vielen Teilchen sehr unwahrscheinlich. Deshalb ist die Anwendung des Virialsatzes in dieser Version auf einfache Systeme mit wenigen Teilchen beschränkt.

Was passiert, wenn wir statt des Mittelwertes über  $\Delta T$  einen Mittelwert über einen großen Zeitraum nehmen? Wir erhalten dafür im Grenzfall

$$\overline{f(t)} := \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Delta t} \int_{-\Delta t}^{+\Delta t} dt' f(t'). \quad (142)$$

Ist  $|\langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{z}}| \leq A$  mit  $A \in \mathbb{R}^{>0}$  beschränkt, weil das System nur ein endliches Volumen einnimmt und Geschwindigkeiten nicht beliebig groß werden, dann erhalten wir immer noch

$$\left| \overline{\frac{d}{dt} \langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{z}}} \right| \leq \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{2A}{2\Delta t} = 0 = 2\overline{T} - \overline{\langle \mathbf{z}, \nabla U(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbf{z}}} \quad (143)$$

oder

$$2\overline{T} - \overline{\langle \mathbf{z}, \nabla U(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbf{z}}} = 0. \quad (144)$$

Diese geläufigere Version des Virialsatzes gilt auch für nicht-periodische Systeme, deren  $\langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{z}}$  aber *beschränkt sein muss*. Diese Form ist trivialerweise auch für periodische System gültig, weil periodische Systeme immer beschränkt sind.

### 3.6 Homogene Potenziale

Wir können den Virialsatz noch konkreter machen, in dem wir anmerken, dass viele praktische Potenziale  $U(\mathbf{z})$  *homogene Funktionen* vom Grade  $k$  sind, d.h. man findet oft

$$U(\alpha \mathbf{z}) = \alpha^k U(\mathbf{z}) \quad (145)$$

für beliebige Zahlen  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Zum Beispiel erfüllt das Gravitationspotenzial  $U(\alpha \mathbf{r}) = \text{konst}/(\alpha r) = \alpha^{-1} U(\mathbf{r})$ ; also ist hier  $k = -1$ . Oder es ist  $U(\alpha \mathbf{r}) = C \alpha^2 r^2 = \alpha^2 U(\mathbf{r})$  für einen harmonischen Oszillator, d.h.  $k = +2$ .

Für homogene Potenziale folgt einerseits aus deren Definition

$$\frac{\partial U(\alpha \mathbf{z})}{\partial \alpha} = U(\mathbf{z}) \frac{\partial \alpha^k}{\partial \alpha} = k \alpha^{k-1} U(\mathbf{z}) \quad (146)$$

und andererseits durch Anwendung der Kettenregel, dass

$$\frac{\partial U(\alpha \mathbf{z})}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial(\alpha \mathbf{r}_i)}{\partial \alpha}, \nabla_i U(\mathbf{z}) \right\rangle_{\mathbf{z}=\alpha \mathbf{z}} = \left\langle \frac{\partial(\alpha \mathbf{z})}{\partial \alpha}, \nabla U(\mathbf{z}) \right\rangle_{\mathbf{z}=\alpha \mathbf{z}} = \langle \mathbf{z}, \nabla U(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbf{z}=\alpha \mathbf{z}}. \quad (147)$$

Setzen wir hier nun  $\alpha = 1$ , ergibt sich eine verblüffend einfache Beziehung homogener Potentiale nach Leonhard Euler (\*1701-†1783),

$$\langle \mathbf{z}, \nabla U(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbf{z}} = kU(\mathbf{z}), \quad (148)$$

die wir im Virialsatz ersetzen können. Deswegen erhalten wir nun

$$2\bar{T} - k\overline{U(\mathbf{z})} = 0 \quad (149)$$

oder für die mittlere Gesamtenergie des Systems

$$\bar{E} = \bar{T} + \overline{U(\mathbf{z})} = \frac{2+k}{2}\overline{U(\mathbf{z})} = \frac{2+k}{k}\bar{T}. \quad (150)$$

Wir erinnern daran, dass  $E$  im Falle eines konservativen Potentials eine Erhaltungsgröße ist, d.h.  $\bar{E} = E$ .

Der Virialsatz gibt uns also einen Zusammenhang zwischen der mittleren kinetischen und mittleren potenziellen Energie des  $N$ -Teilchen-Systems (bei beschränkten Systemen). Bei harmonischen Oszillatoren mit  $k = 2$  finden wir, dass die mittlere kinetische und die mittlere potenzielle Energie im zeitlichen Mittel gleichverteilt sind, d.h.  $\overline{U(\mathbf{z})} = \bar{T} = \frac{1}{2}\bar{E}$ . Bei gravitativ gebundenen Systemen,  $k = -1$ , und  $\bar{E} < 0$  findet man hingegen  $\bar{T} = -\overline{U(\mathbf{z})}/2 = -\bar{E}$ , also keine Gleichverteilung.

Befindet sich ein *einziges* Teilchen in einem Zentralkraft-Potenzial  $U(r) = -\alpha/r$  auf einer Kreisbahn mit Radius  $r = r_0 = \text{konst.}$ , dann ist im Mittel für einen Umlauf  $\bar{T} = \alpha/(2r_0) = m\bar{v}^2/2$  oder  $\bar{v}^2 = \alpha/(mr_0)$ . Wir können also die mittlere quadratische Geschwindigkeit entlang der Bahn bestimmen, ohne direkt  $\mathbf{r}(t)$  berechnet zu haben. Ist der Radius der Bahn nicht genau konstant sondern nur im Mittel gleich  $r_0$  mit kleinen Schwankungen  $\delta r \ll r_0$  mit  $\overline{\delta r} = 0$ , dann ist die mittlere quadratische Geschwindigkeit etwa (Taylor-Entwicklung nach  $\delta r$  bis  $\delta r^2$ ):

$$\bar{v}^2 = \frac{\alpha}{m} \overline{\frac{1}{r}} = \frac{\alpha}{m} \overline{\frac{1}{r_0 + \delta r}} \approx \frac{\alpha}{m} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{\delta r}{r_0^2} + \frac{\delta r^2}{r_0^3} \right) = \frac{\alpha}{mr_0} \left( 1 + \frac{\overline{\delta r^2}}{r_0^2} \right). \quad (151)$$

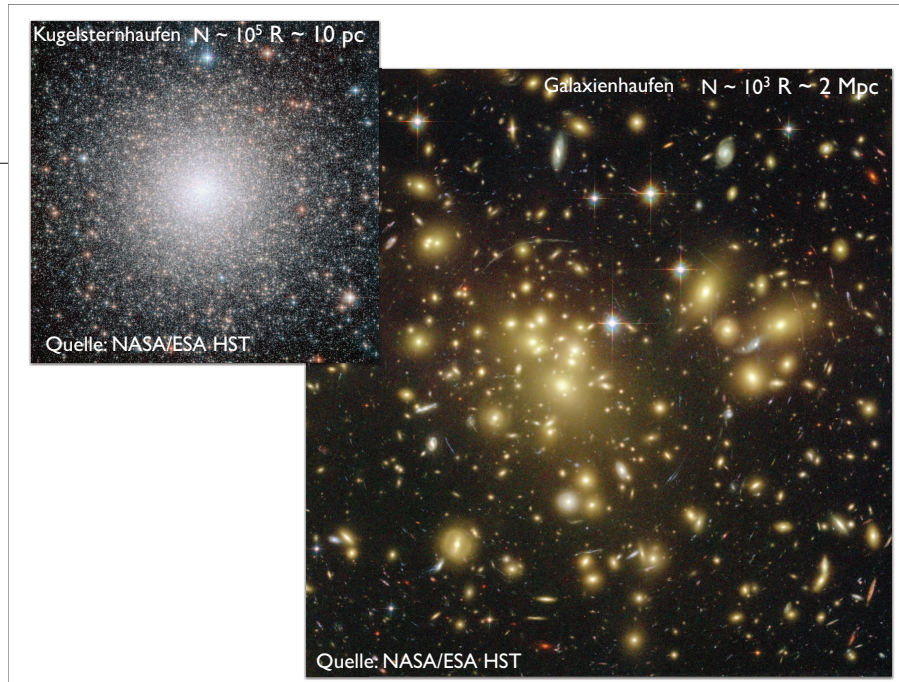
Der Wert von  $\bar{v}^2$  nimmt mit den Schwankungen  $\overline{\delta r^2}$  des Abstands also immer zu.

**Anmerkung** Man könnte sich jetzt fragen, welchen praktischen Nutzen eine Aussage über den zeitlichen Mittelwert über große Zeiträume haben könnte. Tatsächlich ist es so, dass Systeme mit vielen Teilchen häufig gut durchmischt oder *ergodisch* sind. Damit meinen wir, dass die Häufigkeitsverteilung der Orte und Geschwindigkeiten aller Teilchen des Systems zu einem gegebenen Zeitpunkt sich nicht merklich von der entsprechenden Verteilung eines anderen Zeitpunktes unterscheidet. Dies ist normalerweise bei Systemen mit sehr vielen Teilchen wie Gasen aber auch bei großen astronomischen Systemen gegeben, die gravitativ gebunden sind (Kugelsternhaufen, Galaxienhaufen). Dadurch ist die gesamte kinetische Energie  $T$  und die gesamte potenzielle Energie  $U(\mathbf{z})$  zu allen Zeiten etwa konstant. Der Virialsatz wird für also für ergodische Systeme nicht nur eine Aussage über das zeitliche Mittel von  $T$  und  $U$  sondern auch eine Aussage über  $T$  und  $U$  zu jedem Zeitpunkt! Mittels der Methoden der statistischen Physik ist es sogar möglich, die Verteilungen der Orte und Geschwindigkeiten unter gegebenen Rahmenbedingungen (konstantes  $E$  z.B.) zu berechnen, was unser Wissen über die statistischen Eigenschaften eines ergodischen Vielteilchensystems nochmal deutlich vergrößert; siehe z.B. [2].

### 3.7 Eine Anwendung des Virialsatzes: Galaxienhaufen\*

Den Virialsatz können wir z.B. ausnutzen, um die Gesamtmasse eines Galaxienhaufens zu schätzen. Galaxienhaufen sind die größten gravitativ gebundenen Systeme, die wir kennen. Die großen Galaxienhaufen enthalten typischerweise  $N \sim 10^3$  gut sichtbare, helle Galaxien. Wären Galaxienhaufen keine gebundenen Systeme, dann würden die Geschwindigkeitsdispersionen  $\sigma^2 = \overline{|v|^2}/3 \sim (10^3 \text{ km/s})^2$  der Haufenmitglieder zu groß sein, um die Haufen langlebig zu machen;  $\sigma^2$  kann durch die Dopplerverschiebung von Absorptionslinien in den Spektren der Galaxien ermittelt werden. Wir beobachten aber einfach zu viele Galaxienhaufen, um diese als vorübergehende, kurzlebige Strukturen erklären zu können.

Die Gravitationskraft ist die dominierende Kraft auf kosmologischen Skalen, d.h.  $k = -1$ . Durch kinematische Abschätzungen wissen wir außerdem, dass diese Systeme genügend Zeit hatten, um gut durchmischt zu sein. Aufgrund des Virialsatzes erwarten wir also  $2\overline{T} + \overline{U(\mathbf{z})} = 0$ , wobei  $\overline{T}$  die gesamte kinetische Energie der Galaxien ist und  $\overline{U(\mathbf{z})}$  deren gesamte gravitative Bindungsenergie. Wir betrachten Galaxien auf diesen Skalen als Punktmassen mit den Massen  $m_i$  und der Helligkeiten  $L_i$ . Aufgrund unseres



Verständnisses der Physik von Galaxien ist es plausibel anzunehmen, dass  $m_i \propto L_i$ . Deshalb sind für  $M = \sum m_i$  und  $L_g = \sum L_i$

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{v}_i|^2 = \frac{M}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} |\mathbf{v}_i|^2 = \frac{M}{2} \sum_{i=1}^N \frac{L_i}{L_g} |\mathbf{v}_i|^2 \sim \frac{3}{2} M \sigma^2. \quad (152)$$

Für die *beobachtbare* Geschwindigkeitsdispersion  $\sigma^2$  gewichten wir jede einzelne Galaxie mit  $L_i/L_g$ . Die gesamte potenzielle Energie des Haufens ist

$$\overline{U(z)} = -\frac{G}{2} \sum_{i \neq j}^N \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = -\frac{M^2 G}{2} \sum_{i \neq j}^N \frac{L_i L_j}{L_g^2 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (153)$$

Dieser Ausdruck stellt uns vor ein kleines Problem, weil  $\mathbf{r}_i$  den räumlichen Orten der Galaxien entspricht, wir aber üblicherweise nur deren projizierte Position am Himmel kennen. Oder, wenn wir die Entfernung des Haufens bestimmen können, dann kennen wir nur die projizierten Abstände der Galaxienpaare  $i$  und  $j$  am Himmel. Galaxienhaufen erscheinen ungefähr als rotationssymmetrische Gebilde am Himmel, so dass wir vermuten können, die Haufenmitglieder sind im Mittel räumlich mehr oder weniger kugelsymmetrisch

verteilt. Hierdurch können wir im Mittel

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^{-1} = \frac{2}{\pi} |\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_j|^{-1} \quad (154)$$

benutzen, wobei  $\mathbf{d}_i$  die *Tangentialkomponente* von  $\mathbf{r}_i$  an der Himmelssphäre darstellt [5];  $|\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_j| = \theta_{ij}D$ , wenn  $\theta_{ij}$  der Winkelabstand der Galaxien  $i$  und  $j$  ist (in RAD) und  $D$  der Abstand des Haufens.

Dann ergibt sich aus dem Virialsatz

$$3M\sigma^2 - \frac{M^2G}{\pi D} \sum_{i \neq j}^N \frac{L_i L_j}{L_g^2 \theta_{ij}} = 0 \quad (155)$$

oder

$$M = \frac{3\pi\sigma^2 D}{G} \left( \sum_{i \neq j}^N \frac{L_i L_j}{L_g^2 \theta_{ij}} \right)^{-1}. \quad (156)$$

Für typische Werte von  $\sigma \sim 10^3$  km/s,  $(\sum_{i \neq j} L_i L_j / L_g \theta_{ij} / D)^{-1} \sim 0.5$  Mpc und  $N \sim 10^3$  ergibt sich  $M \sim 10^{15} M_\odot$ . Hier ist  $M_\odot \sim 2 \times 10^{30}$  kg die Masse der Sonne und 1 Mpc  $\sim 3 \times 10^{22}$  m ist ein gebräuchliches Entfernungsmaß in der Astronomie. Zum Vergleich: Die Entfernung unserer Nachbarspiralgalaxie Andromeda M31 ist ca. 0.78 Mpc.

**Anmerkung** Hellen Galaxien entspricht in einem Galaxienhaufen also etwa eine Masse von  $m \sim M/N \sim 10^{12} M_\odot$ , was grob 100 mal mehr Masse entspricht als wir durch Sterne in diesen Galaxien erklären können. Man schließt daraus, dass der größte Teil der Masse in Galaxienhaufen nicht durch die sichtbaren Sterne zustande kommt. Durch weitere Messungen weiß man, dass auch atomares oder molekulares Gas in und zwischen den Galaxien nicht ausreicht um dieses Massendefizit zu erklären. Diesem in der Kosmologie allgegenwärtige Massendefizit ordnet man eine hypothetische *Dunklen Materie* zu, deren physikalische Natur bisher unbekannt ist, aber durch Beobachtungen eingegrenzt werden kann. Es ist möglich, dass dieses Defizit durch eine falsche Annahme von  $k = -1$  im Gravitationsgesetz erklärt wird, was bedeuten würde, wir müssten unsere physikalische Beschreibung des Gravitationsgesetzes verändern (Allgemeine Relativitätstheorie). Vielleicht ist auch eine Kombination von modifiziertem Gravitationsgesetz und physikalischer Dunkler Materie die richtige Antwort. Abgesehen vom Dunkle-Materie-Phänomen gibt es jedoch bisher keinen testbaren Hinweis auf Abweichungen vom ansonsten gut getesteten

Standard-Gravitationsgesetz. Die Arbeit an einer Antwort auf diese wichtige Frage ist ein aktuelles Forschungsgebiet der physikalischen Grundlagenforschung.

### 3.8 Mechanische Ähnlichkeit\*

Der Virialsatz macht eine statistische Aussage über ein Vielteilchensystem, ohne dass wir die Trajektorien im Detail wirklich wissen müssen. Eine Diskussion der mechanischen Ähnlichkeit bietet uns eine weitere Methode, etwas über die Eigenschaften der Lösungen zu erfahren, ohne diese explizit zu kennen.

Nehmen wir beispielsweise an, wir haben eine beliebige Lösung  $z(t)$  der Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}(m \odot z)(t) + \nabla U(z(t)) = 0 \quad (157)$$

und fragen uns nun, ob wir daraus in einfacher Weise eine Lösung  $z'(t)$  des verwandten Problems

$$\gamma \frac{d^2}{dt^2}(m \odot z')(t) + \delta \nabla U(z'(t)) = 0 \quad (158)$$

finden können;  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$  seien beliebige Konstanten. Dies bedeutet also: Wir verändern alle Massen um den Faktor  $\gamma$ ,  $m_i \mapsto \gamma m_i$ , und ändern die Stärke des Potentials um  $U(z) \mapsto \delta U(z)$ . Eine Lösung dieses Problems beantwortet etwa die Frage “Was passiert, wenn die Masse der Teilchen größer ist?” oder “Was, wenn das Potenzial stärker ist als angenommen?”.

Um dieses Problem zu lösen, raten wir aus  $z(t)$  eine neue Lösung mittels  $z'(t) = \alpha z(t/\beta)$ . Wir vermuten also, dass durch die Ähnlichkeit des alten Problems Gl. (157) mit dem neuen Problem Gl. (158), die Lösungen auch ähnlich bleiben, wengleich die Trajektorien vielleicht insgesamt größer ( $\alpha > 1$ ) oder kleiner ( $\alpha < 1$ ) werden oder die Bewegung der Teilchen entlang der Bahnen vielleicht schneller ( $\beta < 1$ ) oder langsamer ( $\beta > 1$ ) wird. Setzen wir diese Vermutung in die neue Bewegungsgleichung ein, kriegen wir

$$\alpha \gamma \frac{d^2}{dt^2}(m \odot z)(t\beta^{-1}) + \delta \nabla U(\alpha z(t\beta^{-1})) = 0 . \quad (159)$$

Wir führen zusätzlich eine neue Zeitkoordinate  $s = t\beta^{-1}$  ein:

$$\frac{\alpha \gamma}{\delta \beta^2} \frac{d^2}{ds^2}(m \odot z)(s) + \nabla U(\alpha z(s)) = 0 . \quad (160)$$

Offensichtlich sieht diese “neue” Bewegungsgleichung exakt aus wie die alte Gl. (157), wenn  $\alpha = 1$  und  $\gamma/\delta = \beta^2$ , sprich  $z(s)$  ist eine Lösung in diesem speziellen Fall.

Dies bedeutet u.a.: Verändern wir nicht das Potenzial,  $\delta = 1$ , aber die Massen der Teilchen um  $\gamma$ , dann ist  $z(t\beta^{-1})$  immer noch eine Lösung, aber nun mit dem Zeitparameter  $\beta = \sqrt{\gamma}$ ; die Teilchen bewegen sich mit einer anderen Geschwindigkeit entlang gleicher Trajektorien. Lassen wir andererseits die Massen unverändert,  $\gamma = 1$ , aber drehen wir an der Stärke der Wechselwirkungen durch  $\delta \neq 1$ , dann ist immer noch  $z(t\beta^{-1})$  eine Lösung, nur diesmal mit  $\beta^{-1} = \sqrt{\delta}$ ; eine stärkere Wechselwirkung  $\delta > 1$  macht jetzt die Bewegung schneller!

Ist es auch möglich, die Größe der Trajektorien zu ändern, ohne deren Form zu beeinflussen? Zumindest bei homogenen Potenzialen können wir darüber etwas aussagen, weil dann  $\nabla U(\alpha z(s)) = \alpha^{k-1} \nabla U(z(s))$  und deshalb

$$\frac{\alpha^{2-k}\gamma}{\delta\beta^2} \frac{d^2}{ds^2}(m \odot z)(s) + \nabla U(z(s)) = 0. \quad (161)$$

Hierdurch erhalten wir insbesondere auch dann neue Lösungen aus  $z(t)$ , wenn wir das ursprüngliche Problem unverändert lassen,  $\delta = \gamma = 1$ . Eine Schaar von neuen Lösungen ist nämlich immer dann gegeben, wenn  $\alpha^{2-k} = \beta^2$ . Verändern wir also die Größe der Trajektorien um  $\alpha$ , dann ist  $\alpha z(t\alpha^{k/2-1})$  immer auch eine Lösung!

Beispielsweise hat ein harmonischer Oszillator  $k = 2$ . Haben wir also eine oszillierende Lösung, dann wissen wir jetzt, dass  $\alpha z(t)$  auch eine sein muss;  $\alpha$  verändert hier die Schwingungsamplitude aber nicht die Dauer, so dass die Schwingungsdauer einer Oszillation nicht von der Amplitude abhängig ist.

Über allgemeine Lösungen gravitativ wechselwirkender Teilchen,  $k = -1$ , hingegen lernen wir, dass zu jeder Lösung  $z(t)$  auch  $\alpha z(t\alpha^{-3/2})$  eine sein muss. Ist also eine Ellipse  $r(t)$  eines Teilchens eine Lösung des Kepler-Problems, dann ist auch die um  $\alpha > 1$  größere Ellipse eine mögliche Lösung, wenngleich mit einer Umlaufdauer, die um  $\alpha^{3/2}$  grösser ist. Dies erinnert uns an das dritte Keplersche Gesetz, demzufolge  $T^2/a^3 = \text{konst.}$  oder  $T \propto a^{3/2}$ , wenn  $a$  die große Halbachse einer Bahnellipse ist. Bemerkenswert ist, dass diese allgemeinere Relation für *alle* Lösungen des Kepler-Problems gilt, nicht nur für die geschlossenen elliptischen Bahnen (s.u.).

**Anmerkung** Auch bemerkenswert ist, dass  $\alpha z(t\alpha^{-3/2})$  eine Skalierungsrelation für *alle* Bahnen gravitativer Wechselwirkungen von Punktteilchen ist. Auch wenn diese Bahnen weder elliptisch noch geschlossen oder nicht mal analytisch berechenbar sind! Haben wir also einen Kugelsternhaufen mit vielleicht  $10^5$  gravitativ wechselwirkenden Sternen, dann erhalten wir einen doppelt so großen Haufen (mit  $2^3 = 8$  mal kleinerer Sterndichte),  $\alpha = 2$ , mit ansonsten exakt den gleichen Trajektorien, wenn wir gleichzeitig die Geschwindigkeiten aller Sterne um den Faktor  $\alpha^{3/2}/\alpha = \sqrt{\alpha} = \sqrt{2}$  verringern. (Die Bahnlänge verändert sich um den Faktor  $\alpha$ ; die Zeit, in der ein Bahnstück durchreist wird, um  $\alpha^{3/2}$ .)

Dies zeigt uns außerdem, dass ein gravitativ gebundenes System im Gleichgewicht eine größere Ausdehnung einnimmt, wenn wir die Geschwindigkeiten der Teilchen verkleinern. Dies ergibt sich auch aus dem Virialsatz, demzufolge  $2\bar{T} + \overline{U(z)} = 0$  gilt: Ist  $\bar{T}$  größer, dann muss  $\overline{U(z)}$  kleiner werden. Ein kleineres, negativeres  $\overline{U(z)}$  entspricht aber stärker gebundenen Teilchen, was nur dadurch erreicht wird, dass die mittleren Abstände  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  kleiner werden; das System nimmt weniger Raum ein.

Auch Gase sind Vielteilchensysteme, wenngleich mit einer völlig andersartigen Wechselwirkung: Die elektrische Kraft wirkt abstoßend, wenn der Abstand zwischen den Molekülen sehr klein wird. Bei größeren Abständen hingegen können sich die Moleküle relativ frei mit geringer Anziehung bewegen (Lennard-Jones-Potenzial). Gase verhalten sich deshalb genau gegensätzlich zu einem Kugelsternhaufen. Erhöhen wir die Geschwindigkeiten der Moleküle, also deren kinetische Energie oder die *Temperatur* des Gases, dann tendiert das Gas dazu, sich stärker auszudehnen, weil der Druck ansteigt. Man muss also vorsichtig sein, wenn man Parallelen zieht zwischen einem gravitativ gebundenen Vielteilchensystem und einem Gas!



## 4 Zweikörperproblem

Wir sehen uns nun ein ideales Zweikörperproblem an. Dafür nehmen wir an, dass zwei Punkteilchen der Massen  $m_1$  und  $m_2$  im Abstand  $r$  mittels eines Zentralkraft-Potenzials  $U(r)$  wechselwirken und dass keine äußeren Kräfte auf die zwei Teilchen wirken,  $F_i^{(a)} = 0$ . Das Zweikörpersystem ist abgeschlossen.

### 4.1 Äquivalentes Einkörperproblem

Um uns das Leben zusätzlich einfacher zu machen, betrachten wir die Bewegung im Schwerpunktsystem ( $R \equiv O$ ):

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0 ; m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = 0 . \quad (162)$$

Trajektorien in jedem anderen System ergeben sich wie immer aus der Galilei-Transformation der Lösungen  $\mathbf{z}(t) = (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t))$ .

Offenbar sind die Orte  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  wegen Gl. (162) nicht unabhängig, da  $\mathbf{r}_1 = -m_2/m_1 \mathbf{r}_2$ . Zusätzlich hängt die Kraft der Wechselwirkung nur vom Abstand  $|\mathbf{d}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  ab. Es ist deshalb zweckmäßig, direkt den Differenzvektor

$$\mathbf{d} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1 + m_2}{m_1} \mathbf{r}_2 = +\frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{r}_1 \quad (163)$$

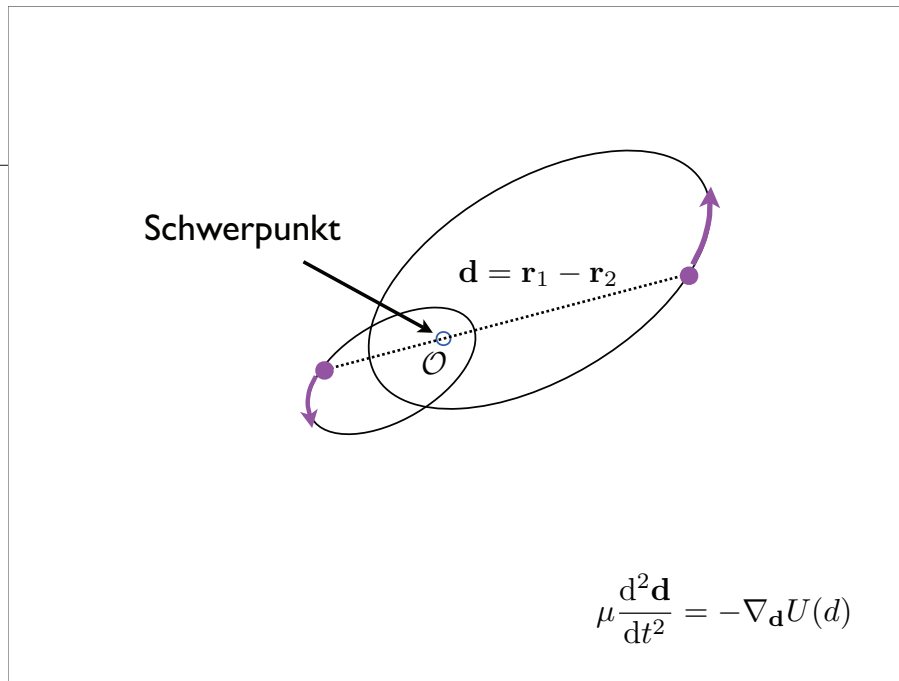
als unabhängige Größe des Problems einzuführen;  $\mathbf{d}$  zeigt vom Ort des Körpers 2 auf den Ort des Körpers 1. Anders ausgedrückt: Haben wir eine Lösung für  $\mathbf{d}$ , dann ist automatisch

$$\mathbf{r}_1 = +\frac{m_2}{M} \mathbf{d} ; \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{M} \mathbf{d} ; M := m_1 + m_2 ; \quad (164)$$

$M$  ist die Gesamtmasse des Systems. Das bedeutet, die zwei Bahnen  $\mathbf{r}_i(t)$  sind *Punktspiegelungen* voneinander um den Schwerpunkt, jedoch mit der Einschränkung, dass deren Kurven im Vergleich zu  $\mathbf{d}$  um den Faktor  $m_i/M$  verkleinert werden ( $m_i \leq M$ ). Insbesondere ist die Bahn eines massereicheren Teilchens kleiner in seiner Ausdehnung als die eines masseärmeren Teilchens. Im Grenzfall von  $m_1 \gg m_2$  bleibt  $\mathbf{r}_1 \approx \mathbf{0}$  praktisch beim Schwerpunkt sitzen. Dies ist z.B. der Fall für die Sonne im Sonne-Erde-System.

Die Bewegungsgleichung von  $\mathbf{d}$  ist nun

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{d} = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_1 - \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_2 = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{12} =: \frac{1}{\mu} \mathbf{F}_{12} , \quad (165)$$



wobei  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$  wegen des 3. Axioms. Hier haben wir eine neue Größe eingeführt, die

### Reduzierte Masse.

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} . \quad (166)$$

Die reduzierte Masse wird im Grenzfall  $\mu = m_i$ , falls  $m_i \ll m_j$ . Z.B. ist die reduzierte Masse des Sonne-Erde-Systems praktisch identisch mit der Masse der Erde. Da die Kraft zwischen den zwei Teilchen nur vom Abstand  $d = |\mathbf{d}|$  abhängt, finden wir:

$$\mathbf{F}_{12} = -\nabla_1 U(d) = -\nabla_1 d \frac{\partial U(d)}{\partial d} = -\nabla_1 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \frac{\partial U(d)}{\partial d} = -\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \frac{\partial U(d)}{\partial d} = -\frac{\mathbf{d}}{d} \frac{\partial U(d)}{\partial d} . \quad (167)$$

Also hat die Bewegungsgleichung des *Abstandvektors*  $\mathbf{d}$  mathematisch die Form eines Einkörperproblems mit Masse  $\mu$  und Ortsvektor  $\mathbf{d}$ :

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{d}}{dt^2} = -\frac{\mathbf{d}}{d} \frac{\partial U(d)}{\partial d} = -\nabla_{\mathbf{d}} U(d) . \quad (168)$$

Dies ist das reduzierte Zweikörperproblem.

## 4.2 Bewegungsintegrale

Da wir ein konservatives Kraftfeld betrachten ohne explizite Zeitabhängigkeit, muss die Gesamtenergie dieses äquivalenten Einkörperproblems eine erhaltene Größe sein, d.h.

$$E = \frac{\mu}{2} |\dot{\mathbf{d}}|^2 + U(d) = \text{konst.} \quad (169)$$

Wir haben hier in der Notation berücksichtigt, dass das Potenzial sogar nur vom Betrag des Abstandvektors,  $d := |\mathbf{d}|$ , abhängen soll. Eine weitere Erhaltungsgröße ist wegen der Zentralkraft und Abgeschlossenheit des Systems der Drehimpuls

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{d} \times \dot{\mathbf{d}} = \text{konst.} \quad (170)$$

Dies definiert uns eine Bahnebene, weil insbesondere die Richtung von  $\mathbf{L}$  erhalten ist;  $\mathbf{d}$  und  $\dot{\mathbf{d}}$  können für alle Zeiten nur in der von  $\mathbf{L}$  als Normale definierten Ebene liegen. Aus diesem Grunde, wählen wir o.B.d.A. ein Koordinatensystem, in dem der Drehimpuls konstant in Richtung des Basisvektors  $\mathbf{e}_z = \mathbf{L}/L$  zeigt, d.h.

$$\mathbf{L} = L \mathbf{e}_z. \quad (171)$$

Die Bewegung  $\mathbf{d}(t)$  verläuft dann in der von  $\mathbf{e}_x$  und  $\mathbf{e}_y$  aufgespannten Ebene, d.h.

$$\mathbf{d}(t) = d_x(t) \mathbf{e}_x + d_y(t) \mathbf{e}_y. \quad (172)$$

Als Richtung von  $\mathbf{e}_x$  wählen wir die Richtung des Ortes  $\mathbf{d}$  zum Zeitpunkt  $t_0$ , d.h.  $\mathbf{e}_x = \mathbf{d}(t_0)/|\mathbf{d}(t_0)|$  (Anfangsbedingung bei  $t_0$ ); hierdurch ist  $\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x$ . Im Weiteren sparen wir uns die Zeitargumente, d.h. wir schreiben etwa  $d_x$  anstatt  $d_x(t)$ .

Auch der Betrag  $L = |\mathbf{L}|$  des Drehimpulses hat eine geometrische Bedeutung, nicht nur die Richtung von  $\mathbf{L}$ . Da  $\mathbf{d} \times \dot{\mathbf{d}} = \mathbf{L}/\mu$ , ist  $L/\mu$  die Fläche  $dF$  des durch  $\mathbf{d}$  und  $\dot{\mathbf{d}}$  aufgespannten Parallelogramms, oder:  $dF = L dt/(2\mu)$  ist die Fläche des Dreiecks, das durch  $\mathbf{d}$  und der Bewegung  $\dot{\mathbf{d}} dt$  im infinitesimalen Zeitintervall  $dt$  aufgespannt wird. Da  $L$  eine Konstante ist, muss die von  $\mathbf{d}$  in einem festen Zeitintervall  $\Delta t$  überstrichene Fläche deshalb immer gleich sein. Das ist das 2. Keplersche Gesetz im Falle des Gravitationspotenzials  $U(d) \propto 1/d!$

Wir wollen nun die Bewegung in der  $\{e_x, e_y\}$ -Ebene durch Polarkoordinaten  $(\theta, d)$  beschreiben, d.h.

$$\mathbf{d} = d \cos \theta \mathbf{e}_x + d \sin \theta \mathbf{e}_y = d \mathbf{e}_r, \quad (173)$$

$$\dot{\mathbf{d}} = \dot{d} \mathbf{e}_r + d \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad (174)$$

wie in unserer Diskussion der elliptischen Bahnbewegung in Abschnitt 1.6. Da  $e_x$  in Richtung von  $\mathbf{d}(t_0)$  zeigt, muss  $\theta(t_0) = 0$  sein. In dieser *Darstellung* ist

$$|\dot{\mathbf{d}}|^2 = \langle \dot{d} \mathbf{e}_r + d \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \dot{d} \mathbf{e}_r + d \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \rangle = \dot{d}^2 \langle \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_r \rangle + 2 \dot{d} d \dot{\theta} \langle \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta \rangle + d^2 \dot{\theta}^2 \langle \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\theta \rangle = \dot{d}^2 + d^2 \dot{\theta}^2 \quad (175)$$

und (Erinnerung:  $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_z$ )

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{d} \times \dot{\mathbf{d}} = \mu (d \mathbf{e}_r) \times (\dot{d} \mathbf{e}_r + d \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta) = \mu d \dot{d} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r + \mu d^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mu d^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z = L \mathbf{e}_z. \quad (176)$$

Der letzte Schritt sagt uns, dass

$$d^2 \dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{\mu^2 d^2}. \quad (177)$$

Hiermit können wir den kinetischen Anteil der Energie nämlich schreiben als

$$\frac{\mu}{2} |\dot{\mathbf{d}}|^2 = \frac{\mu}{2} \dot{d}^2 + \frac{\mu}{2} d^2 \dot{\theta}^2 = \frac{\mu}{2} \dot{d}^2 + \frac{L^2}{2\mu d^2} \quad (178)$$

und die Gesamtenergie als

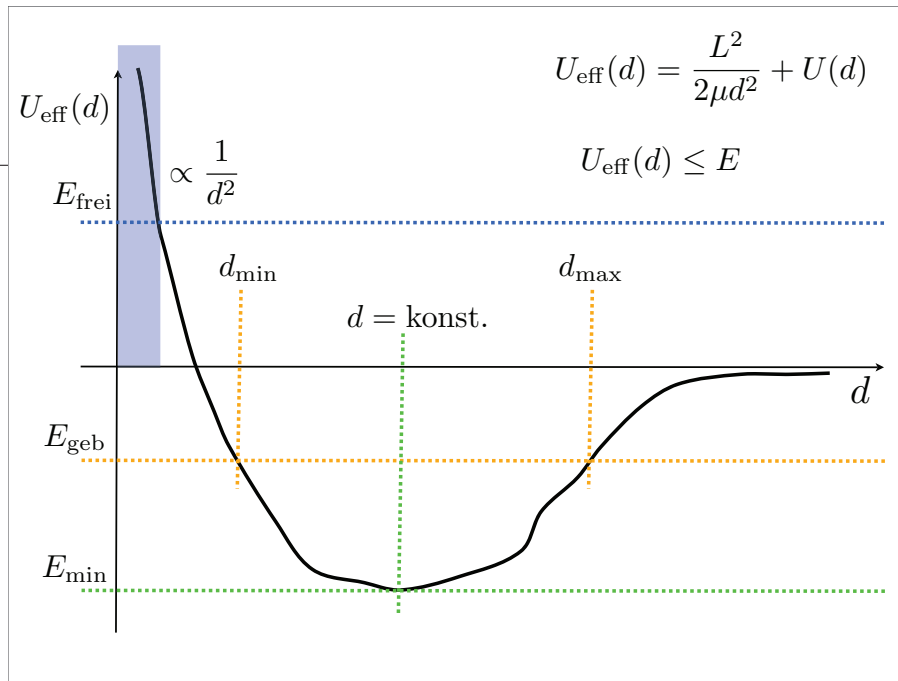
$$E = \frac{\mu}{2} \dot{d}^2 + \frac{L^2}{2\mu d^2} + U(d). \quad (179)$$

Dies ist ein sehr wichtiges Zwischenergebnis. Wir haben das ursprünglich zweidimensionale Problem mit zwei freien Koordinaten  $(d, \theta)$  nun – für einen gegebenen Bahndrehimpuls  $L$  – auf nur noch einen Freiheitsgrad  $d$  reduziert. Die Energie  $E$  ist nun einzig von der Variablen  $d$  abhängig.

Wir beobachten, dass wir hier einen zusätzlichen Term erzeugt haben, der wie ein weiteres Potenzial wirkt, und der uns deshalb ein eindimensionales Problem mit dem *effektiven Potenzial*

$$U_{\text{eff}}(d) := \frac{L^2}{2\mu d^2} + U(d) \quad (180)$$

beschreibt. Das effektive Potenzial wirkt wie ein abstoßende Kraft, die in Richtung des Zentrums  $d = 0$  mit  $1/d^3$  zunimmt. Dies ist eine direkte Konsequenz der Drehimpulserhaltung. Diese verhindert automatisch



bei schwach anziehenden Potenzialen  $U(d) \propto 1/d^n$  mit  $n < 2$ , dass sich die zwei Körper beliebig nahe kommen können. Die einzige Möglichkeit, diese *Zentrifugalbarriere* bei einem “schwachen Potenzial” zu umgehen, ist durch einen radialen Einfall der Teilchen aufeinander zu, d.h. durch  $\dot{\theta}(t) = 0$  oder  $L = 0$ .

Damit sind wir bei unserer Reduzierung des Zweikörperproblems nun an dem Punkt angekommen, den wir schon in Abschnitt 2.7 diskutiert haben. Wir können die Lösung der Bewegungsgleichung  $d(t)$  zwischen den Umkehrpunkten  $\dot{d} = 0$  als Integral ausdrücken:

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{d_0}^d \frac{ds}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu s^2} - U(s)}}, \quad (181)$$

und desweiteren, wenn dieses gelöst ist, den Phasenwinkel als Integral (Drehimpulserhaltung)

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t dt' \dot{\theta}(t') = \frac{L}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{d(t')^2}. \quad (182)$$

Wie schon erläutert, entspricht das positive Vorzeichen in “ $\pm$ ” einer Phase, in dem sich der Abstand vergrößert,  $\dot{d} > 0$ , und das negative Vorzeichen dem entgegengesetzten Fall. Das Zweikörperproblem ist hierdurch integrierbar, d.h. durch Integrale für alle Koordinaten ausdrückbar.

Zur vollständigen Bestimmung der Bahn benötigen wir noch die Anfangsbedingungen  $d_0 = d(t_0)$  und den Drehimpuls der Bahn,  $L = \mu d_0^2 \dot{\theta}(t_0)$ . Die Anfangsbedingungen definieren auch die Orientierung der Bahn- und Bahnebene, die durch  $e_x$  und  $e_y$  zum Ausdruck kommen. Mithilfe von Gl. (164) erhalten wir schließlich die Ortsvektoren  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  aus dem Abstandsvektor  $\mathbf{d}(t) = d(t) \cos \theta(t) \mathbf{e}_x + d(t) \sin \theta(t) \mathbf{e}_y$ .

### 4.3 Bahnintegral

Häufig interessiert uns nicht unbedingt die zeitabhängige Bewegung der Teilchen entlang der Bahn,  $\mathbf{d}(t)$ , sondern lediglich die *Form*  $\mathbf{d}(\theta)$  der Bahnen (Kurve mit Kurvenparameter  $\theta$ ). Hierfür beobachten wir folgenden Zusammenhang (Kettenregel):

$$\frac{dd}{d\theta} = \frac{dd}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{\dot{d}}{\dot{\theta}} = \frac{\mu d^2}{L} \dot{d} = \pm \frac{\mu d^2}{L} \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu d^2} - U(d)} = \pm \frac{\sqrt{2\mu} d^2}{L} \sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu d^2} - U(d)} \quad (183)$$

oder

$$\theta(d, d_0) = \int_0^\theta d\theta' = \pm \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{d_0}^d \frac{ds}{s^2 \sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu s^2} - U(s)}} = \mp \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{1/d_0}^{1/d} \frac{du}{\sqrt{E - \frac{L^2 u^2}{2\mu} - U(1/u)}}. \quad (184)$$

Im letzten Schritt habe wir die Variablentransformation  $d = 1/u$  durchgeführt.

Die Umkehrpunkte sind wieder durch  $\dot{d} = 0$  gegeben. Die Teilchen können die Umkehrpunkte nicht überwinden, wodurch sie entweder nur (i) zwischen zwei (benachbarten) Abständen  $d_{\min}$  und  $d_{\max}$  oszillieren oder (ii) nur genau einen Abstand beibehalten. Im Fall (ii) entspricht  $E$  genau einem Minimum im effektiven Potenzial  $U_{\text{eff}}(d)$  und  $d_{\min} = d_{\max}$ . Dies resultiert in eine *Kreisbahn*, weil dann  $d = \text{konst.}$  (Ausnahme  $L = 0!$ ). Im Fall (i) bewegt sich  $d$  immer zwischen  $d_{\min}$  (Perizentrum) und  $d_{\max}$  (Apozentrum) hin und her, wobei  $d_{\min}$  und  $d_{\max}$  benachbarte Punkte zu  $d_0$  sind, die  $E = U_{\text{eff}}(d_{\min}) = U_{\text{eff}}(d_{\max})$  erfüllen. Als Sonderfall von (i) kann  $d_{\max} \rightarrow \infty$  sein: Der Abstand der zwei Teilchen kann beliebig groß werden.

### 4.4 Geschlossene Bahnen\*

Von besonderem Interesse sind Bahnen (i), bei denen die Teilchen nach  $n_1$  ganzzahligen Wiederholungen des Radialzyklus der Bewegung von  $d_{\min}$  nach  $d_{\max}$  die Phase  $\theta(d_{\max}, d_{\min})$  um ein ganzzahliges Vielfaches

$n_2$  von  $2\pi$  verändern. In diesem Fall sind die Bahnen *geschlossen*, weil sich nach einer Periode  $T$  die Bahn  $\mathbf{d}(t)$  wiederholen muss, also  $\mathbf{d}(t + T) = \mathbf{d}(t)$ . Die Bedingung einer geschlossenen Bahn ist also:

$$\frac{n_2}{n_1} 2\pi = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{1/d_{\min}}^{1/d_{\max}} \frac{du}{\sqrt{E - \frac{L^2 u^2}{2\mu} - U(1/u)}}, \quad (185)$$

oder dass die Phasenänderung  $\theta(d_{\max}, d_{\min})$  ein rationales Vielfaches  $n_2/n_1$  von  $2\pi$  sein muss.

Trivialerweise sind im Fall (ii) Bahnen immer geschlossen, weil sich der Abstand  $d$  nicht ändert. Ob es möglich ist, im Fall (i) geschlossene Bahnen zu erhalten, hängt vom Potenzial  $U(d)$  und den Anfangsbedingungen ab.

## 4.5 Kepler-Problem

Das berühmteste Zweikörperproblem ist vermutlich das Kepler-Problem. Hier betrachtet man zwei gravitativ gebundene Punktmassen mit dem Potenzial

$$U(d) = -\frac{Gm_1 m_2}{d} = -\frac{GM\mu}{d} := -\frac{\alpha}{d}. \quad (186)$$

Wir definieren insbesondere  $U(d \rightarrow \infty) = 0$  (Eichfreiheit). Wir besprechen zwei Möglichkeiten, die Bahnen der Kepler-Problems analytisch zu lösen: Einen direkten Weg in diesem Abschnitt und einen sehr eleganten Weg, der keine Integrationen benötigt, im folgendem Abschnitt.

Die Bahn des Abstandes  $d(\theta)$  ist nun gegeben durch:

$$\theta(d, d_0) = \mp \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{1/d_0}^{1/d} \frac{du}{\sqrt{E + \alpha u - \frac{L^2 u^2}{2\mu}}}. \quad (187)$$

Das Integral ist ein Spezialfall von

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c + bx - ax^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos^{-1} \left( \frac{b - 2ax}{\sqrt{b^2 + 4ac}} \right) \quad (188)$$

des speziellen Falles  $a > 0$  und  $b^2 + 4ac > 0$ .  $a = L^2/2\mu > 0$  ist gegeben, wenn  $L > 0$ . Wir schließen im Folgenden radial einfallende Teilchen ohne Drehimpuls aus.

Wie sieht es mit der Bedingung  $b^2 + 4ac = \alpha^2 + 2EL^2/\mu > 0$  aus? Dies ist offensichtlich erfüllt, sobald  $E > -\alpha^2\mu/(2L^2)$ .  $E$  ist aber immer größer als das Minimum von  $U_{\min} = U_{\text{eff}}(d_{\text{umin}})$  bei  $d_{\text{umin}} = L^2/(\alpha\mu)$ , da die kinetische Energie in  $E$  immer positiv oder null sein muss, also

$$E \geq U_{\min} = \frac{L^2}{2\mu d_{\text{umin}}^2} - \frac{\alpha}{d_{\text{umin}}} = -\frac{\alpha^2\mu}{2L^2}. \quad (189)$$

Diese Bedingung ist also genau dann immer erfüllt, wenn  $E > U_{\min}$ , was immer dann gegeben ist, wenn wir *keine exakte Kreisbahn* mit  $\dot{d} = 0$  betrachten. Wir wollen diesen Fall also auch ausschließen, merken aber an, dass dieser dennoch als stetische Ergänzung in der abschließenden Lösung enthalten ist. Er ist also nicht wirklich problematisch.

Wir führen zwei neue konstante Größen ein,

$$p := \frac{L^2}{\mu\alpha} ; \quad \epsilon := \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{\mu\alpha^2}}, \quad (190)$$

und erhalten so

$$\theta(d) - \theta(d_0) = \theta(d) = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \frac{\sqrt{2\mu}}{L} \cos^{-1} \left( \frac{p/d - 1}{\epsilon} \right) \Big|_{d_0}^d = \cos^{-1} \left( \frac{p/d - 1}{\epsilon} \right) + \Delta\theta, \quad (191)$$

oder aufgelöst nach dem Abstand  $d$ :

$$d(\theta) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\theta - \Delta\theta)}. \quad (192)$$

Die Integrationskonstante  $\Delta\theta$  auf der rechten Seite entspricht dem Wert der Stammfunktion bei  $d_0$ . Beachte, dass wir  $\theta(d_0) \equiv 0$  definiert hatten. Die Phase  $\theta = +\Delta\theta$  entspricht dem kleinsten Abstand  $d_{\min} = p/(1 + \epsilon)$  (Perizentrum).

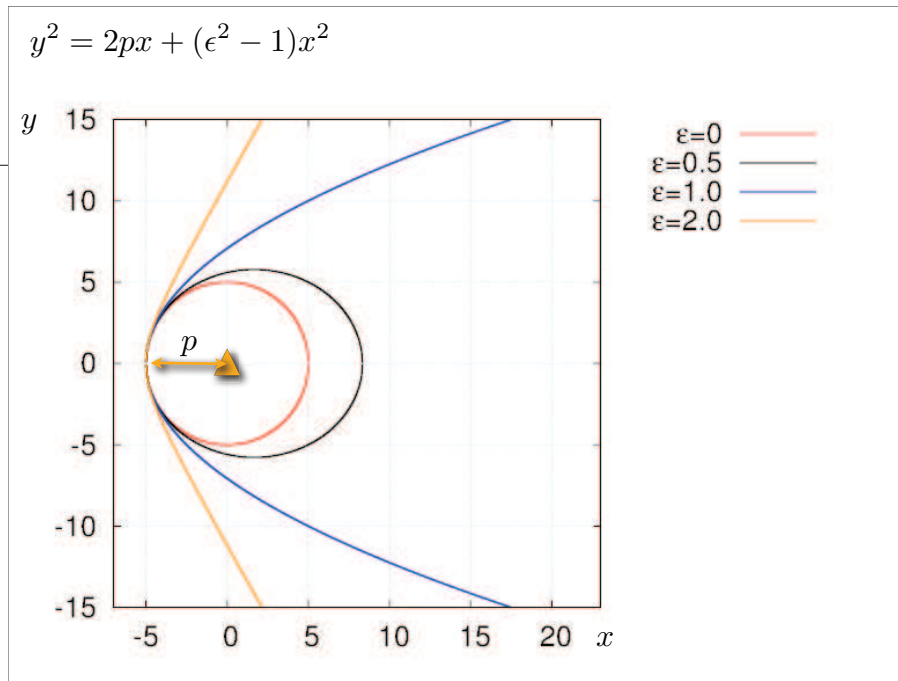
Diese Lösungen lassen sich in *vier Familien* unterteilen:

$\epsilon = 0$ : Kreisbahnen mit Radius (Abstand)  $p$ ;

$0 < \epsilon < 1$ : Ellipsen mit  $d_{\min} = p/(1 + \epsilon)$  und  $d_{\max} = p/(1 - \epsilon)$ ; oder der großen Halbachse  $a = p/(1 - \epsilon^2)$  und der kleinen Halbachse  $b = \sqrt{pa}$  (folgt aus  $\epsilon^2 = 1 - b^2/a^2$ );

$\epsilon = 1$ : Parabelbahnen mit der kleinsten Annäherung  $d_{\min} = p/2$  aber keiner Obergrenze der Entfernung;





$\epsilon > 1$ : Hyperbelbahnen mit kleinstem Abstand  $d_{\min} = p/(1 + \epsilon)$  und auch keiner Obergrenze  $d_{\max}$ ;

Die geschlossenen Bahnen der Kreise und Ellipsen erfüllen  $E < 0$ , wohingegen Hyperbelbahnen  $E > 0$ ; der Spezialfall  $E = 0$  ist gegeben für Parabelbahnen. Beachte, dass das Argument der Wurzel in der Definition von  $\epsilon$  wegen  $E \geq U_{\min}$  niemals negativ werden kann.

Alle diese Lösungen sind *Kegelschnitte*, die man in einem geeigneten Koordinatensystem als Lösungen  $y(x)$  der quadratischen Gleichung

$$y^2 = 2px + (\epsilon^2 - 1)x^2 \quad (193)$$

zusammenfassen kann.

**Anmerkung** Eine analytische Lösung der zeitabhängigen Bewegung der Kepler-Problems ist übrigens nicht bekannt! Man löst diesen Teil des Problems durch Bestimmung von  $\theta(t)$  aber einfach numerisch.

### 4.6 3. Keplersches Gesetz

Der Fall  $\epsilon < 1$  beschreibt das 1. Keplersche Gesetz: Planeten bewegen sich auf Kreis- oder Ellipsenbahnen. Diese Bahnen sind geschlossen, weil sich die Körper nach der Umlaufzeit  $T$  bei gleicher Phase exakt wieder beim gleichen Abstandsvektor  $\mathbf{d}$  befinden. Aus der Drehimpulserhaltung folgt, dass die Fläche, die vom Abstandsvektor  $\mathbf{d}$  pro Zeit überstrichen wird, eine Konstante ist. Das ist das 2. Keplersche Gesetz.

Was ist die Umlaufzeit  $T$ ? Hierzu ziehen wir die Impulserhaltung  $L = \mu d^2 \dot{\theta} = \text{konst.}$  heran. Diese besagt, dass der Vektor  $\mathbf{d}$  in der Zeit  $dt$  konstant die Fläche  $dF = L/(2\mu)dt$  überstreicht. Die Fläche einer Ellipse beträgt  $F = \pi ab$ , weshalb

$$T = F \left( \frac{dF}{dt} \right)^{-1} = \frac{2\mu\pi ab}{L} = \frac{2\mu\pi}{L} a \sqrt{ap} = \frac{2\mu\pi}{L} \sqrt{pa^3} . \quad (194)$$

Wir haben oben gesehen, dass  $p = L^2/(\mu\alpha)$ , weshalb die Umlaufdauer  $T$  zu

$$T = \frac{2\mu\pi}{L} \frac{L}{\sqrt{\mu\alpha}} a^{3/2} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} a^{3/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} a^{3/2} \propto a^{3/2} \quad (195)$$

wegen  $\alpha = Gm_1m_2$  wird. Das ist das 3. Keplersche Gesetz. Wir können dies auch schreiben als:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi}{G(m_1 + m_2)} = \text{konst.} . \quad (196)$$

Da die Masse  $m_1$  der Sonne deutlich größer ist als die Masse aller anderen Körper des Sonnensystems, ist  $m_1 + m_2 \approx m_1$ , wodurch  $T^2/a^3$  für alle Planeten praktisch den gleichen Wert hat.

### 4.7 Runge-Lenz-Vektor\*

Abschließen wollen wir die Diskussion des Kepler-Problems mit einer weiteren berühmten Erhaltungsgröße. Wir hatten bisher die Erhaltungsgrößen  $\mathbf{L} = \mu \mathbf{d} \times \dot{\mathbf{d}}$  (Gesamtdrehimpuls),  $m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = 0$  (Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem) und  $E$  (Gesamtenergie). Wir zeigen nun, dass sich hieraus für das Kepler-Problem eine neue Erhaltungsgröße ableiten lässt.

Die Bewegungsgleichung des Kepler-Problems ist

$$\ddot{\mathbf{d}} + \frac{\alpha}{\mu} \frac{\mathbf{d}}{d^3} = 0 . \quad (197)$$

Nehmen wir auf beiden Seiten das Vektorprodukt mit dem konstanten Drehimpuls  $\mathbf{L}$ , dann ergibt sich (Erinnerung:  $d = |\mathbf{d}|$ ; BACCAB-Regel)

$$0 = \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{L} + \frac{\alpha}{\mu d^3} \mathbf{d} \times \mathbf{L} \quad (198)$$

$$= \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{L}) + \frac{\alpha}{d^3} (\langle \mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}} \rangle \mathbf{d} - d^2 \dot{\mathbf{d}}) \quad (199)$$

$$= \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{L}) + \alpha \left( \frac{\dot{\mathbf{d}}}{d^2} \mathbf{d} - \frac{1}{d} \dot{\mathbf{d}} \right) \quad (200)$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{L} - \alpha \frac{\mathbf{d}}{d} \right). \quad (201)$$

Im dritten Schritt haben wir  $\dot{\mathbf{d}} = \langle \dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d} \rangle / d$  verwendet;  $d = |\mathbf{d}|$ . Wir folgern also hier, dass der Vektor

$$\mathbf{A} := \dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{L} - \alpha \frac{\mathbf{d}}{d} \quad (202)$$

entlang der Bahn  $\mathbf{d}(t)$  eine Erhaltungsgröße sein muss. Wir nennen  $\mathbf{A}$  den *Runge-Lenz-Vektor* oder auch Laplace-Runge-Lenz-Vektor.

Der Runge-Lenz-Vektor liegt in der Bahnebene, weil  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{L} \rangle = 0$ . Und  $\mathbf{A}$  ist eine Erhaltungsgröße des Kepler-Problems, deshalb muss hier auch insbesondere seine Richtung konstant sein. Wir können diese Richtung als eine Orientierung der Bahn *in* der Bahnebene verstehen, die für das Kepler-Problem gegeben ist. In welche Richtung zeigt nun  $\mathbf{A}$ ? Dies sehen wir durch (Erinnerung:  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle$ )

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{d} \rangle = |\mathbf{A}|d \cos \phi = \langle \mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{L} \rangle - \frac{\alpha}{d} \langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{L}, \mathbf{d} \times \dot{\mathbf{d}} \rangle - \alpha d = \frac{1}{\mu} \langle \mathbf{L}, \mathbf{L} \rangle - \alpha d = \frac{L^2}{\mu} - \alpha d. \quad (203)$$

Lösen wir dies nach dem Abstand  $d$  auf, erhalten wir

$$d(\phi) = \frac{L^2}{\mu \alpha} \frac{1}{1 + \frac{|\mathbf{A}|}{\mu \alpha} \cos \phi} = \frac{p}{1 + \frac{|\mathbf{A}|}{\mu \alpha} \cos \phi} = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi}. \quad (204)$$

Dies ist aber wieder der Kegelschnitt, Gl. (192), aus dem vorherigen Abschnitt, wenn wir  $\epsilon := |\mathbf{A}|/(\mu \alpha)$  setzen. Der Vergleich mit dieser Lösung zeigt uns, dass die Orientierung von  $\mathbf{A}$  bei  $\phi = 0$  in Richtung des Perizentrums zeigt, und dass der Betrag  $|\mathbf{A}| = \epsilon \mu \alpha$  direkt mit der Elliptizität der Bahn zusammenhängt.

Wir erhalten also mittels  $\mathbf{A}$  die Lösung der Bahngleichung für das Kepler-Problem, ohne dass wir diesmal irgend welche Integrale berechnen mußten! Dies demonstriert die Macht von Erhaltungsgrößen in der theoretischen Physik. Mehr Details kann man in [4] finden, wo die Lösung des Kepler-Problems koordinatenfrei hergeleitet wird.

## 4.8 Das gestörte Zweikörperproblem\*

Die Kepler-Bahnen gehen von sehr idealisierten Bedingungen aus, nämlich davon, dass wir nur die isolierte Wechselwirkung genau zweier Teilchen betrachten müssen. Sehen wir uns z.B. das Sonnensystem an, wird aber klar, dass hier mehr Wechselwirkungen eine Rolle spielen, die einen Einfluß auf die Bahn eines Planeten haben sollten; etwa die Anziehung der großen Gasplaneten. Dennoch ist die Schwerkraft in Richtung der Sonne die dominierende Anziehungskraft, die die Form der Planetenbahn maßgeblich bestimmt. Die Lösung des Zweikörperproblems ist deshalb vermutlich in 1. Näherung immer noch richtig.

Die exakte *analytische* Lösung dieses Vielkörperproblems im Sonnensystem ist aber nicht möglich, weil schon das Dreikörperproblem nicht mehr allgemein integrabel ist, wie von Henri Poincare (\*1854-†1912) bewiesen wurde. Aus diesem Grund hat man die *Störungsrechnung* entwickelt, die versucht, kleine Abweichungen von einem idealen Problem zu approximieren. Wir wollen die Logik dieser Methode anhand eines relativ einfachen Problems demonstrieren.

Wir betrachten die Kraft  $\nabla U(r)$  eines Zweikörper-Zentralkraftproblems ohne äußere Kräfte;  $r$  ist der Abstand vom Schwerpunkt. Die Masse des einen Körpers (Sonne) sei viel größer als die Masse  $m$  des anderen Körpers (Planet), d.h.  $\mu \approx m$ . In diesem Fall erhalten wir als Bewegungsgleichung des Abstands  $r$  (Ableitung der Gesamtenergie; Kettenregel):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{r}^2 \right) = m \ddot{r} = - \frac{d}{dt} \left( E - \frac{L^2}{2mr^2} - U(r) \right) = \frac{L^2}{mr^3} \dot{r} - \frac{\partial U(r)}{\partial r} \dot{r} \quad (205)$$

oder

$$m \ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\partial U(r)}{\partial r}. \quad (206)$$

Im Fall des Kepler-Problems ist  $U(r) = -\alpha/r$ . Wir nehmen an, dass wir eine Lösung  $r(t)$  für diesen Fall kennen (ideales Problem).

Wir stellen uns nun vor, dass das ursprüngliche Potenzial  $U(r)$  ein wenig durch ein zusätzliches Potenzial  $\delta U(r)$  gestört wird. Es soll  $|\delta U(r)| \ll |U(r)|$  gelten: das Störpotenzial ist sehr klein. Z.B. kann man der Störung einer Planetenbahn durch die Schwerkraft anderer Planeten in der gleichen Bahnebene ein Ringpotenzial  $\delta U_i(r) \propto 4GM_i a_i^2 / r^3$  zuordnen, wenn sich diese bei  $a_i < r$  befinden; oder ein Potenzial  $\delta U_i(r) \propto GM_i r^3 / (4a_i^2)$  für  $a_i > r$ ;  $M_i$  ist die Planetenmasse und  $a_i$  der Abstand des störenden Planeten von

der Sonne [1]. Wir erhalten wegen  $\delta U$  eine neue Bewegungsgleichung (rechts)

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\partial U(r)}{\partial r} - \frac{\partial \delta U(r)}{\partial r}. \quad (207)$$

Wir vermuten, dass diese Störung zumindest für einen kleinen Zeitraum nur einen geringen Effekt  $|\delta r| \ll r$  auf den Abstand haben wird. Wir machen deshalb den folgenden *Störungsansatz* für die neue Bewegungsgleichung

$$r(t) = r_0(t) + \delta r(t), \quad (208)$$

wobei  $r_0(t)$  die Lösung für den Abstand  $r$  des idealen Problems darstellt, d.h. diese Lösung erfüllt:

$$m\ddot{r}_0 = \frac{L^2}{mr_0^3} - \frac{\partial U(r_0)}{\partial r}. \quad (209)$$

Welche Bewegungsgleichung gilt nun für  $\delta r_0(t)$ ? Wir setzen den Ansatz (208) in die Bewegungsgleichung (207) ein:

$$m\ddot{r}_0 + m\ddot{\delta r} = \frac{L^2}{m(r_0 + \delta r)^3} - \frac{\partial U(r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0+\delta r} - \frac{\partial \delta U(r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0+\delta r}. \quad (210)$$

Weil  $\delta r$  klein sein soll, machen wir eine Taylor-Entwicklung der Terme auf der rechten Seite um  $r_0$  bis zur ersten Ordnung in  $\delta r$  (lineare Störung), d.h.

$$\frac{L^2}{m(r_0 + \delta r)^3} = \frac{L^2}{mr_0^3} - \frac{3L^2}{mr_0^4} \delta r + \mathcal{O}(\delta r^2); \quad (211)$$

$$\frac{\partial U(r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0+\delta r} = \frac{\partial U(r_0)}{\partial r} + \frac{\partial^2 U(r_0)}{\partial r^2} \delta r + \mathcal{O}(\delta r^2); \quad (212)$$

$$\frac{\partial \delta U(r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0+\delta r} = \frac{\partial \delta U(r_0)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \delta U(r_0)}{\partial r^2} \delta r + \mathcal{O}(\delta r^2). \quad (213)$$

Setzen wir diese Terme in Gl. (207) ein und benutzen die Relation Gl. (209), dann finden wir die Bewegungsgleichung der linearen Störung

$$m\ddot{\delta r} + \left( \frac{\partial^2 U(r_0)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \delta U(r_0)}{\partial r^2} + \frac{3L^2}{mr_0^4} \right) \delta r = - \frac{\partial \delta U(r_0)}{\partial r}. \quad (214)$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen, müssten wir nun für gegebene Anfangsbedingungen erst die ideale Lösung  $r_0(t)$  bestimmen. Dann würden wir diese i.A. zeitabhängige Lösung in die obigen Differentialgleichung zweiter Ordnung einsetzen, um die Störung  $\delta r(t)$  zu berechnen. Für die Anfangsbedingung der Störung nehmen wir an, dass

1. diese bei  $t_0$  verschwindet,  $\delta r(t_0) = 0$ ;
2. und dass diese erst durch das Störpotenzial  $\delta U$  bei  $t_0$  hervorgerufen wird, d.h.  $\dot{\delta r}(t_0) = 0$ . Dies hat zur Konsequenz, dass  $\delta r(t) = 0$  für alle  $t$ , falls wir mit  $\delta U = \text{konst.}$  keine Störung haben sollten!

Die Lösung des Störungsproblems kann je nach Aufgabenstellung anspruchsvoll sein. Wir kommen dann nur mit numerischen Methoden weiter. Die Lösung ist dann aber auch nur für Zeiträume sinnvoll, die klein genug sind, damit tatsächlich  $|\delta r| \ll r$  bleibt. Ist dies nicht mehr gegeben, bricht die lineare Näherung zusammen, und wir müssen höhere Ordnungen in  $\delta r$  miteinbeziehen oder einen völlig neuen Ansatz suchen.

Als Anwendung betrachten wir nun den Fall  $r_0(t) \approx \text{konst.}$ , wie wir das bei einer annähernden Kreisbahn erwarten würden. Hierfür ist es zweckmäßig, die obigen Differentialgleichung nochmal umzuschreiben, indem wir den Drehimpulsterm mit  $L^2$  des effektiven Potenzials durch die Bewegungsgleichung (209) ersetzen,

$$m\ddot{\delta r} + \left( \frac{\partial^2 U(r_0)}{\partial r_0^2} + \frac{\partial^2 \delta U(r_0)}{\partial r_0^2} + \frac{3m\dot{r}_0}{r_0} + \frac{3}{r_0} \frac{\partial U(r_0)}{\partial r_0} \right) \delta r = -\frac{\partial \delta U(r_0)}{\partial r_0}. \quad (215)$$

Da  $r_0 \approx \text{konst.}$ , ist  $3m\dot{r}_0/r_0 \approx 0$  und deshalb

$$m\ddot{\delta r} + C\delta r = -\frac{\partial \delta U(r_0)}{\partial r_0}; \quad C := \frac{\partial^2 U(r_0)}{\partial r_0^2} + \frac{\partial^2 \delta U(r_0)}{\partial r_0^2} + \frac{3}{r_0} \frac{\partial U(r_0)}{\partial r_0}; \quad (216)$$

$C$  ist eine Konstante weil  $r_0 = \text{konst.}$  Nun ist es sinnvoll, die Störung etwas umzudefinieren,

$$\delta r = \hat{\delta r} + \frac{1}{C} \frac{\partial \delta U(r_0)}{\partial r_0}, \quad (217)$$

um den konstanten Term auf der rechten Seite der inhomogenen Differentialgleichung zu beseitigen. Wir erhalten nun mit

$$\frac{d^2 \hat{\delta r}}{dt^2} + \frac{C}{m} \hat{\delta r} = 0 \quad (218)$$

eine wohlbekannte homogene Differentialgleichung für  $\hat{\delta r}(t)$ .

Für  $C < 0$  wächst die Lösung exponentiell an, ein sanfter Hinweis, dass die lineare Störung nur für sehr kurze Zeit eine sinnvolle Beschreibung sein kann.

Bei  $C = 0$  ist  $\ddot{\delta r}(t) = 0$  und wegen der Anfangsbedingungen  $\delta r(t) = 0$  für alle Zeiten. Es gibt also keine Störung in diesem Falle.

Der Fall  $C > 0$  ist sinnvoller, weil wir dafür die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators erhalten; einer Störung wirkt eine *rückstellende Kraft* entgegen; unser System hat eine gewisse Stabilität. Die allgemeine Lösung dieses Falles ist

$$\hat{\delta}r(t) = A \cos(\omega[t - t_0]) + B \sin(\omega[t - t_0]) \quad (219)$$

mit  $\omega^2 := C/m$  und zwei Konstanten  $A$  und  $B$ . Die Konstanten ergeben sich aus den oben beschriebenen Anfangsbedingungen  $\delta r(t_0) = \dot{\delta}r(t_0) = 0$  oder  $\hat{\delta}r(t_0) = -\frac{1}{C} \frac{d\delta U(r_0)}{dr_0}$  und  $\dot{\hat{\delta}}r(t_0) = 0$ . Die Rückstellung erzeugt eine oszillierende Variation des idealen Problems der Art

$$\delta r(t) = \frac{1}{C} \frac{d\delta U(r_0)}{dr_0} (1 - \cos(\omega[t - t_0])) \quad (220)$$

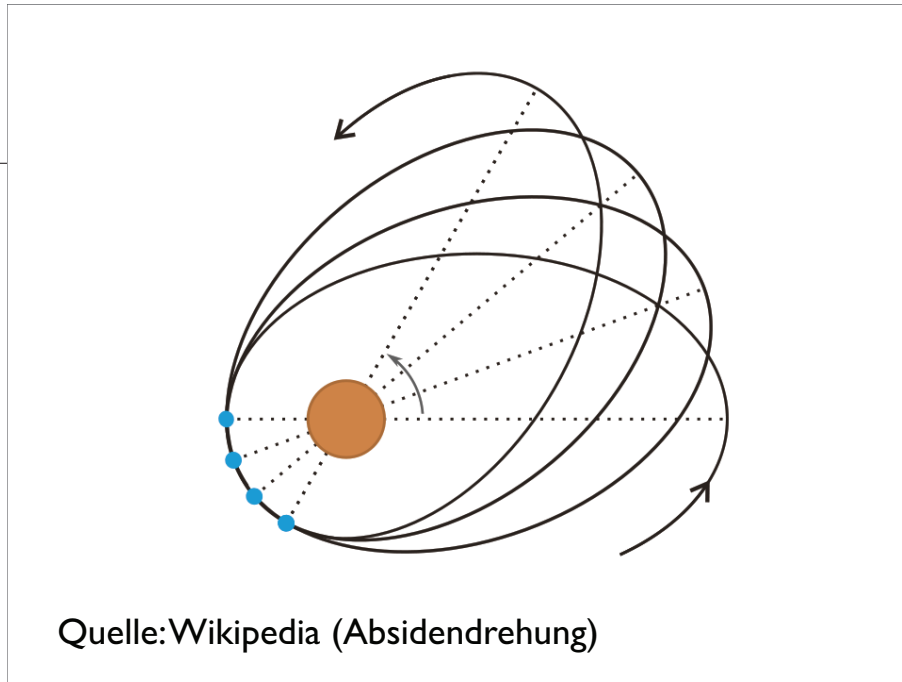
mit der Kreisfrequenz  $\omega$ .

Die oszillierende Störung hat demnach eine Periodendauer von  $T_p = 2\pi/\omega$ . Ist auf der anderen Seite die Periodendauer des idealen Orbits  $T$ , dann werden wir bei einer idealen geschlossenen Bahn nur dann zum Anfangsort  $r(t_0)$  zurückkehren können, wenn  $n_1 T = n_2 T_p/2$  und  $n_1, n_2$  natürliche Zahlen sind. Nur in diesem Fall kann das Teilchen nach  $n_1$  Perioden mit Phase  $n_1 2\pi$  wieder zu

$$r(t_0 + n_1 T) = r_0(t_0 + n_1 T) + \delta r(t_0 + n_2 T_p/2) = r_0(t_0) + 0 = r_0(t_0) \quad (221)$$

zurückkehren. Folglich muss das Perioden-Verhältnis  $T_p/T = 2n_1/n_2$  einer rationalen Zahl entsprechen.

Ist dies nicht der Fall, dann wird die gestörte Bahn nicht mehr geschlossen sein, was man z.B. beim Planeten Merkur sehr deutlich als Periheldrehung beobachten kann (der Runge-Lenz-Vektor ändert langsam seine Richtung). Diese Drehung wird dadurch verursacht, dass das Newtonsche Gravitationsgesetz in geringer Entfernung zur Sonne ungenau wird und mit  $\delta U(r) = -\epsilon/r^3$  geringfügig korrigiert werden muss. Diese Korrektur folgt aus der Allgemeinen Relativitätstheorie von Albert Einstein (\*1879-†1955). Man findet aber auch Periheldrehungen der Bahnen anderer Planeten im Sonnensystem – insbesondere Mars und Saturn (um die 20 Bogensekunden pro Jahr) –, die durch eine klassische gravitative Wechselwirkung der Planeten untereinander hervorgerufen wird (durch das Ringpotenzial).



**Anmerkung** Für ein allgemeines Störpotenzial  $\delta U(r) = -\beta r^n$  erhält man

$$C = \frac{\alpha}{r_0^3} - n(n-1)\beta r_0^{n-2}, \quad (222)$$

so dass als Bedingung der Stabilität

$$C > 0 \iff \alpha - n(n-1)\beta r_0^{n+1} > 0 \quad (223)$$

verlangt werden muss.



## 5 Euler-Lagrange-Gleichungen

Wir sind mit unserer Beschreibung der klassischen Mechanik schon ziemlich weit gekommen. Mit dem bisher Erarbeiteten könnte man den Eindruck gewinnen, dass wir jedes klassische physikalische Problem zumindest konzeptionell durch Aufstellung der Bewegungsgleichungen nun lösen könnten.

### 5.1 Zwangsbedingungen

Es stellt sich aber heraus, dass wir noch gar nicht so genau wissen, wie wir sehr alltägliche Probleme in diesem Formalismus unterzubringen haben. Was ist etwa zu tun, wenn die Bewegung der Körper durch *Zwangsbedingungen* eingeschränkt wird? Der Massepunkt eines Pendels z.B. kann sich nicht frei bewegen, sondern muss für jede erlaubte Auslenkung immer einen festen Abstand  $l$  zum Aufhängepunkt haben. Diese Bedingung können wir schreiben als:

$$|\mathbf{r}|^2 = l^2 . \quad (224)$$

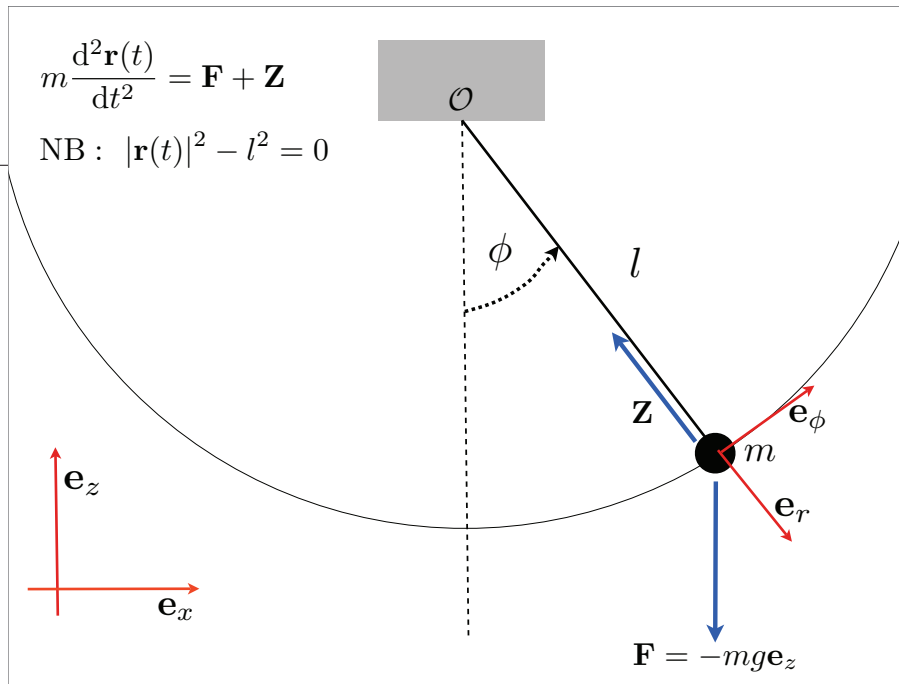
Es geht uns nun also um die Lösung der Bewegungsgleichungen mit Nebenbedingungen bzw. Zwangsbedingungen.

Wir schreiben allgemein Zwangsbedingungen dieser Art als ein System von  $i = 1 \dots k$  Gleichungen mit

$$f_i(\mathbf{z}, t) = 0 ; \quad (225)$$

jede erlaubte Bewegung der Teilchenorte  $\mathbf{z} \in Z$  muss zu jedem Zeitpunkt dieses System von Gleichungen erfüllen;  $f_i$  sei stetig differenzierbar. Wir nennen diese Zwangsbedingungen *holonom*. Wir unterteilen holonome Zwangsbedingungen nochmal in *holonom-skleronom*, wenn sie nicht explizit von der Zeit abhängen, oder *holonom-rheonom*, wenn sie stetig von der Zeit abhängen. Eine explizit zeitabhängige Zwangsbedingung könnte sein, dass sich die Länge  $l$  eines Pendels mit der Zeit verändert, d.h.  $|\mathbf{r}|^2 - l(t)^2 = 0$ . Oder wir betrachten Teilchen, die sich in einer Ebene bewegen müssen, die langsam rotiert.

Zwangsbedingungen, die sich nicht in der Form (225) schreiben lassen, nennen wir folglich *nichtholonom*. Ein Beispiel dieser Kategorie sind Billardkugeln, die sich frei auf dem Billardtisch bewegen dürfen,



aber an der Bande reflektiert werden. Unsere Bewegung auf der Erdoberfläche ist auch nichtholonom, weil wir nicht durch den Boden fallen können, aber uns oberhalb des Bodens frei bewegen können. Zwangsbedingungen, die Geschwindigkeiten  $\dot{z}$  enthalten, können holonom sein, wenn sie aus totalen Zeitableitung einer holonomen Zwangsbedingung entstehen. Leiten wir z.B.  $|\mathbf{r}|^2 - l^2 = 0$  nach der Zeit ab, so wird

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{r}| = \frac{\langle \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle}{|\mathbf{r}|} = 0 \iff \langle \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle = 0 \quad (226)$$

eine Nebenbedingung, die von der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{r}}$  abhängt, aber trotzdem holonom ist. Wir konzentrieren uns hier hauptsächlich auf holonome Zwangsbedingungen.

Mathematisch definieren holonome Zwangsbedingungen eine Hyperebene oder Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ , die die Menge aller erlaubten Teilchenorte definiert. Hierdurch werden die  $3N$  Freiheitsgrade des Systems auf  $N_k := 3N - k$  eingeschränkt (wenn die Zwangsbedingungen unabhängig sind).

Eine “Einschränkung” kann nur bedeuten, dass zusätzliche Kräfte – *Zwangskräfte* –  $\mathbf{Z}_i$  wirken, die dafür sorgen, dass die Teilchen so beschleunigt werden, dass sich diese ausschließlich innerhalb  $z \in \mathcal{M}$  bewegen. Beim vorangegangenen Beispiel des Pendels muss eine Zwangskraft in Richtung der Aufhängung

wirken, damit die resultierende Kraft den Abstand des Massenpunktes zur Aufhängung nicht verändert kann. Deshalb lauten die eingeschränkten Bewegungsgleichungen i.A.

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i - \mathbf{Z}_i = 0 \quad \forall i, \quad (227)$$

zusammen mit den Nebenbedingungen;  $f_i(\mathbf{z}, t) = 0$  im holonomen Fall. Wir können das als Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichungen verstehen.

Wie die Zwangskräfte genau aussehen, wird durch die Zwangsbedingungen bestimmt und von der Trajektorie selbst. Das Problem der eingeschränkten Bewegung scheint also sehr schnell sehr kompliziert werden zu können.

## 5.2 Zwangsprobleme 2. Art

Um das Problem anzugehen, versucht man einen neuen Satz von  $N_k$  unabhängigen *generalisierten Koordinaten*  $q_k$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{N_k}, t) =: \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t) \quad (228)$$

zu finden, der alle Zwangsbedingungen für eine *unabhängige Wahl* der Werte von  $q_k$  immer gleichzeitig erfüllt, d.h.

$$f_i(\mathbf{z}(\mathbf{q}, t), t) = 0 \quad \forall i, q_k. \quad (229)$$

Wir nennen Probleme, die so generalisiert werden können, *Probleme 2. Art*. Diese Probleme haben den Vorteil, wie wir gleich sehen werden, dass wir die Bewegungsgleichungen lösen können, ohne die Zwangskräfte jemals explizit kennen zu müssen.

*Probleme 1. Art*, bei denen wir keine generalisierten Koordinaten finden, die alle Zwangsbedingungen trivialerweise erfüllen, behandeln wir später. Hier muss man zumindest einen Teil der Zwangskräfte zusammen mit den Bewegungsgleichungen berechnen.

Für das Beispiel unseres Pendels könnte man, wenn wir nur die Schwingung in einer Ebene  $\{\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x\}$  betrachten, den Ortsvektor  $\mathbf{r}$  durch den Ausschlagwinkel  $q_1 = \phi$  parametrisieren,

$$\mathbf{r}(\phi) = l \sin \phi \mathbf{e}_x - l \cos \phi \mathbf{e}_z =: l \mathbf{e}_r =: \begin{pmatrix} +l \sin \phi \\ -l \cos \phi \end{pmatrix}; \quad (230)$$

der Vektor  $e_z$  zeige nach oben. Dies erfüllt automatisch für alle Winkel  $\phi$  die Zwangsbedingung  $|\mathbf{r}|^2 - l^2 = l^2 - l^2 = 0$ . Um nun die Bewegungsgleichung des einzigen Freiheitsgrads  $\phi$  zu erhalten, setzen wir  $\mathbf{r}(\phi)$  in die Bewegungsgleichung (??) ein,

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(\phi) - \mathbf{F} - \mathbf{Z} \quad (231)$$

$$= m \frac{d}{dt} \left( l \dot{\phi} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \right) - \mathbf{F} - \mathbf{Z} \quad (232)$$

$$= m l \ddot{\phi} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} - m l \dot{\phi}^2 \begin{pmatrix} + \sin \phi \\ - \cos \phi \end{pmatrix} - \mathbf{F} - \mathbf{Z} \quad (233)$$

$$=: m l \ddot{\phi} \mathbf{e}_\phi - m l \dot{\phi}^2 \mathbf{e}_r - \mathbf{F} - \mathbf{Z} = 0 . \quad (234)$$

Um hier weitere Fortschritte zu machen, multiplizieren wir diese *Vektorgleichung* in einem Fall mit  $\langle \mathbf{e}_\phi, \cdot \rangle$ ,

$$m l \ddot{\phi} - \langle \mathbf{e}_\phi, \mathbf{F} \rangle - \langle \mathbf{e}_\phi, \mathbf{Z} \rangle = m l \ddot{\phi} - \langle \mathbf{e}_\phi, \mathbf{F} \rangle = 0 , \quad (235)$$

und in dem anderen mit  $\langle \mathbf{e}_r, \cdot \rangle$

$$m l \dot{\phi}^2 - \langle \mathbf{e}_r, \mathbf{F} \rangle - \langle \mathbf{e}_r, \mathbf{Z} \rangle = 0 . \quad (236)$$

Beachte, dass  $\langle \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi \rangle = 0$  und  $|\mathbf{e}_r|^2 = |\mathbf{e}_\phi|^2 = 1$ . Wir zerlegen also hier die Kräfte in Komponenten entlang der Aufhängung  $\mathbf{e}_r$  und senkrecht dazu, d.h. in Richtung  $\mathbf{e}_\phi$ . Die Zwangskraft hält ja nur den Abstand zur Aufhängung konstant, weshalb  $\langle \mathbf{e}_\phi, \mathbf{Z} \rangle = 0$  in der ersten Gleichung gilt.

Wir sehen nun, dass die erste Gleichung nicht von der Zwangskraft abhängt, aber trotzdem die Bewegung in  $\phi$  beschreibt, d.h.

$$\frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} = \frac{\langle \mathbf{e}_\phi, \mathbf{F} \rangle}{m l} = \frac{m g}{m l} \sin \phi(t) = \frac{g}{l} \sin \phi(t) ; \quad (237)$$

die Kraft wirke hier nach unten mit  $\mathbf{F} = -m g \mathbf{e}_z$ . Wohingegen die zweite Gleichung vollständig die Zwangskraft beschreibt (zusammen mit  $\langle \mathbf{e}_r, \mathbf{Z} \rangle = 0$ ),

$$\langle \mathbf{e}_\phi, \mathbf{Z} \rangle = m l \dot{\phi}^2 - \langle \mathbf{e}_r, \mathbf{F} \rangle = m l \dot{\phi}^2(t) + m g \cos \phi(t) , \quad (238)$$

die wir berechnen können, sobald wir die Bewegungsgleichung  $\phi(t)$  gelöst haben. Dies könnte durchaus von Interesse sein, insbesondere im Maschinenbau, wenn man ein Pendel konstruieren möchte und wissen

muss, welche Zwangskräfte die Aufhängung aushalten muss. Die Konstruktion ist es schließlich, die die Zwangsbedingungen aufrechterhalten muss! Wir erkennen im Übrigen in Gl. (238) die Zentripedalkraft wieder,  $ml\dot{\phi}^2$ , die wir brauchen, um ein Teilchen auf einer Kreisbahn zu halten. Die Zwangskraft muss aber auch die Kraftkomponente  $\langle \mathbf{e}_r, \mathbf{F} \rangle$  entlang der Aufhängung kompensieren (maximal bei  $\phi = 0$ ).

### 5.3 D'Alembertsches Prinzip

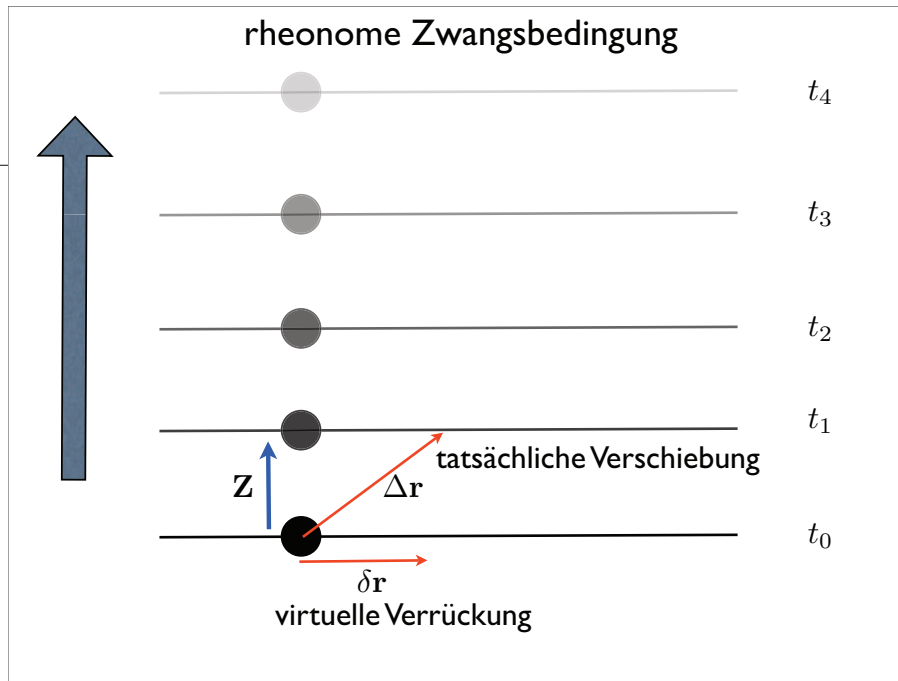
Um die vorherige Rechnung zu verallgemeinern, führt man ein weiteres Axiom der klassischen Mechanik ein, das die Natur der Zwangskräfte betrifft: das sogenannte *D'Alembertsche Prinzip*, benannt nach Jean-Paptiste le Ronde D'Alembert (\*1717-†1783). Hierfür stellt man sich ein System mit  $N$  Teilchen und Positionen  $\mathbf{r}_i$  vor. Es sei  $\delta\mathbf{r}_i$  eine beliebige infinitesimale Veränderung der Positionen  $\mathbf{r}_i$ , die mit den Zwangsbedingungen *verträglich* ist. Zusätzlich – und das ist wichtig hier – sollen die Zwangsbedingungen zu einem Zeitpunkt *eingefroren* sein. Bei skeloronomen Zwangsbedingungen spielt dies keine Rolle, weil diese sowieso zeitunabhängig sind. Aber auch rheonome Nebenbedingungen sollen für die gedachten Verschiebungen  $\delta\mathbf{r}_i$  zeitlich konstant sein.

Man nennt die Verschiebungen  $\delta\mathbf{r}_i$  *virtuelle Verrückungen*, weil diese unter rheonomen Bedingungen praktisch nicht durchführbar sind. Zur Veranschaulichung siehe Beispiel der Perle auf einem horizontalen Draht: Der Draht bewegt sich immer weiter nach oben, so dass eine rein horizontale Bewegung der Perle niemals möglich ist. Halten wir die Zwangsbedingung aber zeitlich fest, dann kann sich die Perle beliebig nach links und rechts bewegen. Die Zwangskraft wirkt in diesem Beispiel vertikal und sorgt dafür, dass die Perle sich genau vorgegeben nach oben bewegt.

**Definition.** Das *D'Alembertsche Prinzip* besagt nun, dass virtuelle Verschiebungen  $\delta\mathbf{r}_i$  entgegen der Zwangskräfte  $\mathbf{Z}_i$  in der Summe niemals Arbeit verrichten, d.h.

$$\sum_{i=1}^N \langle \mathbf{Z}_i, \delta\mathbf{r}_i \rangle = 0 . \quad (239)$$

Dieses *Postulat* basiert auf der Beobachtung, dass die Anwesenheit von skleronomen Zwangsbedingungen die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems nicht verändert. Deswegen geht man auch bei

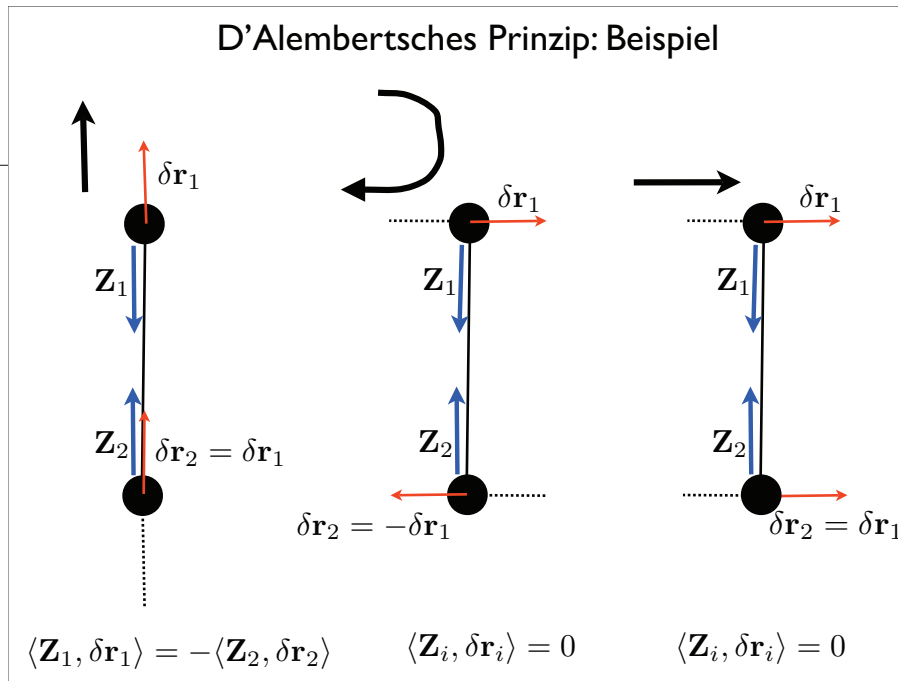


rheonomen Bedingungen davon aus, dass diese keine Arbeit in der Summe leisten, wenn wir die zeitliche Änderung der Zwangsbedingungen abschalten würden.

Vorsicht! Das D'Alembertsche Prinzip bedeutet aber

- *nicht*, dass einzelne Teilchen keine virtuelle Arbeit leisten, d.h. einzelne Summanden  $\langle Z_i, \delta r_i \rangle$  können durchaus von null verschieden sein; siehe Beispiel mit zwei Perlen, die durch einen Draht auf einen festen Abstand gehalten werden (die Verrückungen können das Perlenpaar verschieben und drehen); wegen Actio=Reactio gilt in diesem Fall  $Z_1 = -Z_2$ ;
- *nicht*, dass rheonome Zwangsbedingungen keine Arbeit an einem System leisten können. Beispiel: Eine Kugel, die sich aufgrund von Zwang entlang einer geführten Trajektorie  $\hat{r}(t)$  mit  $|\dot{\hat{r}}| \neq \text{konst.}$  bewegen muss. Offensichtlich ändert sich hier die kinetische Energie der Kugel! Die erlaubten virtuellen Verrückungen sind in diesem Fall aber alle ausnahmslos  $\delta r = 0$ , da die Kugel keine Freiheitsgrade hat,  $f(\mathbf{r}, t) = |\mathbf{r}(t) - \hat{\mathbf{r}}(t)| = 0$ .

Im zweiten Fall wird die Arbeit am System durch den "Motor" geleistet, der die rheonomen Zwangsbe-



dingungen gewährleistet. Virtuelle Arbeiten verschwinden jedoch auch hier.

## 5.4 Euler-Lagrange Gleichungen 2. Art

Das D'Alembertsche Prinzip gibt uns nun die Möglichkeit, die Zwangskräfte aus den Bewegungsgleichungen zu beseitigen, wenn wir geeignete generalisierte, unabhängige Koordinaten  $q_i$  finden können.

Dank dieses Postulats können wir nämlich die Bewegungsgleichungen mit Zwangskräften als

$$\sum_{i=1}^N \underbrace{\langle m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i - \mathbf{Z}_i, \delta \mathbf{r}_i \rangle}_{=0} = \sum_{i=1}^N \langle m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i, \delta \mathbf{r}_i \rangle + \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{Z}_i, \delta \mathbf{r}_i \rangle = \sum_{i=1}^N \langle m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i, \delta \mathbf{r}_i \rangle = 0 \quad \forall \delta \mathbf{r}_i \quad (240)$$

schreiben. Diese Summe verschwindet für *alle* erlaubten virtuellen Verrückungen. Dies scheint erst mal wenig Vorteile zu haben, da wir ein System von Differentialgleichungen in eine Summe von Skalaren verwandelt haben. Wir sollten hier zumindest anerkennen, dass auf der rechten Seite der Gleichung die Zwangskräfte nicht mehr auftreten.

Das Problem mit dieser Gleichung sind die virtuellen Verrückungen  $\delta \mathbf{r}_i$ , die aufgrund der Zwangsbedingungen nicht linear unabhängig sind. Deswegen suchen wir uns einen neuen Satz von generalisierten

Koordinaten  $q_i$ , mit  $i = 1 \dots N_k$  bei  $k$  Zwangsbedingungen, die unabhängig gewählt werden dürfen, ohne die Zwangsbedingungen jemals zu verletzen (Problem 2. Art). Dann drücken wir die virtuellen Bewegungen (Kettenregel)

$$\delta \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t) = \sum_{j=1}^{N_k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (241)$$

als Funktion virtueller Verrückungen der neuen Koordinaten  $\delta q_j$  aus. Setzen wir diese Beziehung nun in Gl. (240) ein, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^N \langle m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i, \delta \mathbf{r}_i \rangle = \sum_{j=1}^{N_k} \left( \sum_{i=1}^N \langle m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \rangle \right) \delta q_j = 0 \quad \forall \delta q_j. \quad (242)$$

Dieser Schritt ist eine erhebliche Verbesserung: Die Gl. (242) muss für beliebige und *unabhängige* Kombinationen  $\delta q_j$  gültig sein. Das ist aber nur möglich, wenn die einzelnen Koeffizienten von  $\delta q_j$  (rechts) verschwinden, also wenn

$$\sum_{i=1}^N \langle m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \rangle = \sum_{i=1}^N m_i \langle \ddot{\mathbf{r}}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \rangle - \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{F}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \rangle = 0 \quad \forall j. \quad (243)$$

Dies verwandelt den Satz von  $N$  Bewegungsgleichungen in einen neuen Satz von  $N_k$  Bewegungsgleichungen; eine für jede neue Koordinate  $q_i$ . Im Grunde sind das schon die Bewegungsgleichungen für  $q_i$ , die wir suchen. Aber die direkte Abhängigkeit von  $q_i$  muss nun noch besser herausgearbeitet werden. Wir sehen uns deshalb gleich die beiden Summen auf der rechten Seite genauer an.

**Anmerkung** Bevor wir hier fortfahren, eine kleine Bemerkung die geometrische Interpretation der Vektoren  $\partial_j \mathbf{r}_i := \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$  betreffend. Wir stellen uns vor, wir halten alle Koordinaten  $q_j$  bis auf eine  $q_l$  konstant bei einem bestimmten Wert; wir variieren nur dieses  $q_l$ . Dieses definiert  $\mathbf{r}_i(q_l)$  definiert eine Kurve in  $E^3$ : eine *Koordinatenkurve*. Als einfaches Beispiel stellen wir uns ein kartesisches Koordinatensystem  $\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$  vor. Halten wir  $y$  und  $z$  konstant, erhalten wir durch Variation von  $x$  eine Gerade parallel zur  $x$ -Achse. Die Ableitung  $\partial_j \mathbf{r}_i$  bezeichnet den Tangentialvektor bei  $q_l$  an dieser Koordinatenkurve: einen Basisvektor der  $q_l$ -Achse des lokalen *krummlinigen Koordinatensystems* (i.A. nicht normiert). In unserem Beispiel wäre dies ein Vektor in Richtung der  $x$ -Achse; dieser wäre an jedem Punkt der Kurve gleich. Beim Punkt  $(q_1, q_2, \dots, q_{N_k})$  beschreiben die Tangentialvektoren  $\partial_j \mathbf{r}_i$  deshalb eine lokale



Basis. Da wir uns aber frei entlang aller  $q_j$ -Koordinaten bewegen dürfen, ohne die Nebenbedingungen des Problems zu verletzen, spannt die Basis lokal  $\{\partial_j \mathbf{r}_i | \forall j\}$  den Raum aller Richtungen auf, in die wir das  $i$ te Teilchen noch bewegen können. Die Bewegungsgleichungen (243) projizieren nun die Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{r}}_i$  und die wirkenden Kräfte  $\mathbf{F}_i$  auf diese Basis. Zwangskräfte werden in dieser Darstellung irrelevant, weil wir uns entlang dieser Richtungen ja ohne Einschränkung bewegen dürfen!

**Definition.** Wir bezeichnen in der Gl. (243) die Summe

$$Q_j := \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{F}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \rangle = \langle \mathbf{F}_z, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial q_j} \rangle_z \quad (244)$$

aller projizierten Kräfte entlang  $q_j$  als generalisierte Kräfte.

Wir formen nun den anderen Summanden auf der rechten Seite von Gl. (243) um (Kettenregel und folgende Nebenrechnung)

$$\begin{aligned} m_i \langle \ddot{\mathbf{r}}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \rangle &= m_i \frac{d}{dt} \langle \dot{\mathbf{r}}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \rangle - m_i \langle \dot{\mathbf{r}}_i, \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \rangle \\ &= m_i \frac{d}{dt} \langle \dot{\mathbf{r}}_i, \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \rangle - m_i \langle \dot{\mathbf{r}}_i, \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \rangle \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{m_i}{2} |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{m_i}{2} |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_i}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (245)$$

Dieser Ausdruck beschreibt also eine lineare Operation (Kombination von Ableitungen), die auf die kinetische Energie  $T_i := m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 / 2$  des  $i$ ten Teilchens wirkt. Deswegen wird die gesamte Summe in Gl. (243):

$$\sum_{i=1}^N m_i \langle \ddot{\mathbf{r}}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \rangle = \langle m \odot \ddot{\mathbf{z}}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial q_j} \rangle_z = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad ; \quad T = \sum_{i=1}^N T_i = \frac{1}{2} \langle m \odot \dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{z}} \rangle_z, \quad (246)$$

wobei  $T$  die gesamte kinetische Energie des Systems ausdrückt.

Insgesamt können wir nun die Bewegungsgleichungen in Gl. (243) schreiben als

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0 \quad \forall j. \quad (247)$$

Dies ist die allgemeine Form der *Euler-Lagrange Gleichungen 2. Art* (ELG2) zur Behandlung holonomer Zwangsbedingungen, die auf die Arbeiten von Leonhard Euler (\*1707-†1783) und Joseph-Louis Lagrange (\*1736-†1813) zurückgehen. Diese  $N_k$  Differentialgleichungen 2. Ordnung in der Zeit beschreiben die Entwicklung der generalisierten Koordinaten  $q_i$  in  $t$ . Der entscheidende Fortschritt des Formalismus besteht darin, dass diese Gleichungen auch bei Zwangsbedingungen gültig sind, solange diese (i) holonom sind und (ii) wir Koordinaten  $q_i$  finden können, die unabhängig sind und alle Nebenbedingungen erfüllen.

**Nebenrechnung** Die Rechenschritte, die in der zweiten Zeile von Gl. (245) unterstrichen wurden, müssen noch erläutert werden. Entsprechend der Kettenregel gilt für die totale zeitliche Ableitung

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d\mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t)}{dt} = \sum_{l=1}^{N_k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \dot{\mathbf{r}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (248)$$

und deshalb sofort (partielle Ableitung!)

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad (249)$$

was in der Herleitung eben verwendet wurde. Als nächstes nehmen wir die partielle Ableitung von Gl. (248) nach  $q_j$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^{N_k} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}. \quad (250)$$

Das vergleichen wir mit der totalen Ableitung nach der Zeit  $t$  von (die Reihenfolge partieller Ableitungen ist vertauschbar)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t)}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^{N_k} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j} = \sum_{l=1}^{N_k} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}, \quad (251)$$

und finden durch Vergleich mit Gl. (250) die zweite Identität

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}, \quad (252)$$

die in Gl. (245) verwendet wurde.

**Anmerkung** Die Zwangskräfte tauchen in den Bewegungsgleichungen zwar nicht mehr explizit auf, aber wir könnten diese brauchen, um evtl. die Belastung einer Konstruktion zu berechnen, die für die

Zwangsbedingungen verantwortlich ist. Hierfür kann man folgenermaßen vorgehen: Wir lösen zuerst die Bewegungsgleichungen  $q_j(t)$ . Hieraus erhalten wir dann für jedes Teilchen  $i$  die auf es wirkenden Kräfte  $m_i\ddot{\mathbf{r}}_i(t)$  und hierdurch wegen Gl. (227)

$$\mathbf{Z}_i(t) = m_i\ddot{\mathbf{r}}_i(t) - \mathbf{F}_i(\mathbf{z}(t), t) \quad (253)$$

die Zwangskräfte zu jedem Zeitpunkt  $t$ .

## 5.5 Forminvarianz

Die Wahl der generalisierten Koordinaten ist nicht eindeutig. Sobald wir einen Satz Koordinaten gefunden haben, können wir immer durch die Transformationen

$$q_i = q_i(q'_1, q'_2, \dots, q'_{N_k}, t) \quad (254)$$

auf einen neuen Satz  $q'_i$  wechseln. Beachte hier, dass sich die Geschwindigkeiten durch

$$\dot{q}_i = \frac{d}{dt}q_i(q'_1, \dots, q'_{N_k}, t) \quad (255)$$

aus  $q'_i$  und  $\dot{q}'_i$  ergeben.

Wir nennen die Transformation  $\mathbf{q}(\mathbf{q}', t)$  eine *Punkttransformation*. Da die  $q_i$  die Nebenbedingungen erfüllen, werden auch die neuen Koordinaten  $q'_i$  diese erfüllen. Damit sind aber die Bedingungen der obigen Herleitung der ELG2 gegeben, so dass auch diese neuen Koordinaten den Bewegungsgleichungen (247) gehorchen, wenngleich mit  $q_i \mapsto q'_i$  und  $Q_i \mapsto Q'_i$ . Diese Bewegungsgleichungen sind also forminvariant, sie sind für jeden Satz generalisierter Koordinaten gültig. Man kann dies auch explizit zeigen wie in [3].

## 5.6 Euler-Lagrange Gleichungen 2. Art: konservative Kräfte

In vielen Situationen findet man konservative, geschwindigkeitsunabhängige Kräfte  $\mathbf{F}_z(\mathbf{z}) = -\nabla U(\mathbf{z})$ . Die generalisierten Kräfte werden unter diesen, für den theoretischen Physiker angenehmen Bedingungen

$$Q_j = \langle \mathbf{F}_z, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial q_j} \rangle_z = -\langle \nabla U(\mathbf{z}), \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial q_j} \rangle_z = -\frac{\partial U(\mathbf{z}(\mathbf{q}, t))}{\partial q_j} =: -\frac{\partial U}{\partial q_j}. \quad (256)$$

Hiermit können wir die ELG2 schreiben als ( $\partial U / \partial \dot{q}_i = 0$ )

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i \quad (257)$$

oder einfach als

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i, \quad (258)$$

wobei wir

$$\mathcal{L} := T - U \quad (259)$$

die *Lagrange-Funktion* des Systems nennen. Diese Form der ELG2 wird am häufigsten verwendet.

**Anmerkung** Bei geschwindigkeitsabhängigen Potenzialen  $U(z, \dot{z})$  finden wir als generalisierte Kraft

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}. \quad (260)$$

Deswegen erhalten wir in diesem Falle für die Bewegungsgleichungen immer noch die ELG2 (258), aber nun mit der Lagrange-Funktion  $\mathcal{L} = T - U(z, \dot{z})$ . Formal verändert ein generalisiertes Potenzial, das wie z.B. in der Elektrodynamik antreffen, die Konstruktion der Bewegungsgleichungen also nicht!

Sollten wir nicht alle Kräfte mittels eines Potenzials ausdrücken können, erhalten wir eine Mischform für die ELG2. Alle konservativen Kräfte sind dann als Potenzial in  $\mathcal{L}$  enthalten und alle anderen als generalisierte Kräfte in  $\hat{Q}_j$ , d.h. wir finden die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \hat{Q}_i \quad \forall i. \quad (261)$$

## 5.7 Mathematisches Pendel

Kehren wir nun zurück zu unserem Eingangsproblem des Pendels. Wir betrachten den Fall, dass das Pendel einem homogenen Gravitationsfeld ausgesetzt sein soll. Wir nennen die Richtung entgegen der Schwerkraft die  $z$ -Richtung  $e_z$ . Dann ist  $U = mgz$ . Das Pendel soll nur in der  $xz$ -Ebene schwingen. Als generalisierte Koordinate führen wir den Auslenkwinkel  $\phi$  ein,  $r = l \sin \phi e_x - l \cos \phi e_z$ ;  $l$  ist die konstante

Pendellänge; der Aufhängungspunkt ist der Ursprung,  $\mathbf{r} = 0$ . Also ist  $\dot{\mathbf{r}} = l\dot{\phi} \cos \phi \mathbf{e}_x + l\dot{\phi} \sin \phi \mathbf{e}_z$  und deshalb  $T = m|\dot{\mathbf{r}}|^2/2 = ml^2\dot{\phi}^2/2$ . Die Lagrange-Funktion ist

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{ml^2\dot{\phi}^2}{2} + mlg \cos \phi . \quad (262)$$

Daraus erhalten wir die Bewegungsgleichung für  $\phi$ ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} (ml^2\dot{\phi}) + mlg \sin \phi = ml^2\ddot{\phi} + mlg \sin \phi = 0 \quad (263)$$

oder

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0 . \quad (264)$$

Für kleine Auslenkungen  $\phi$  ist  $\sin \phi \approx \phi$ , und deshalb ist dann die Bewegungsgleichung die eines harmonischen Oszillators mit Kreisfrequenz  $\omega = \sqrt{g/l}$ . Der allgemeinere Fall ist nicht analytisch lösbar (aber integrierbar: eindimensionales Problem mit konservativer Kraft). Man kann ihn näherungsweise mittels Methoden der Störungstheorie diskutieren.

Wir können auch noch eine Reibungskraft  $\mathbf{F} = -\alpha\dot{\mathbf{r}}$  in der Betrachtung berücksichtigen, die der Bewegung des Pendels entgegenwirkt. Dieser entspricht keine konservative Kraft, so dass wir in diesem Fall die generalisierte Reibungskraft für  $\phi$  berechnen müssen:

$$Q_\phi = \left\langle \mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\rangle = -\alpha \langle \dot{\mathbf{r}}, l \cos \phi \mathbf{e}_x + l \sin \phi \mathbf{e}_z \rangle = -\alpha \langle l\dot{\phi} \cos \phi \mathbf{e}_x + l\dot{\phi} \sin \phi \mathbf{e}_z, l \cos \phi \mathbf{e}_x + l \sin \phi \mathbf{e}_z \rangle = -\alpha l^2 \dot{\phi} . \quad (265)$$

Die Bewegungsgleichung des Pendels ist nun ( $\mathcal{L}$  enthält nur die konservativen Kräfte)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - Q_\phi = ml^2\ddot{\phi} + mlg \sin \phi + \alpha l^2 \dot{\phi} = 0 \quad (266)$$

Dies gibt uns nun für kleine  $\phi$  die Bewegungsgleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators.

## 5.8 Dissipationsfunktion\*

Reibungseffekte lassen sich mithilfe einer sogenannten *Dissipationsfunktion* elegant in die Euler-Lagrange-Formalismus integrieren. Dies erreichen wir durch Verallgemeinerung der obigen Überlegung über Reibung bei einem mathematischen Pendel. Hierfür nehmen wir an, dass die Reibungskraft jedes Teilchens

durch

$$\mathbf{F}_i^R = -h_i(|\mathbf{v}_i|) \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|} \quad (267)$$

beschrieben werden kann, wobei  $h_i(v)$  eine beliebige Funktion ist, die nur vom Betrag  $|\mathbf{v}_i|$  der Geschwindigkeit des  $i$ ten Teilchens abhängt;  $h_i(v)$  darf natürlich für jedes Teilchen verschieden sein. Die hier betrachteten Reibungskräfte sind also nur Funktionen der Geschwindigkeit eines Teilchens und wirken immer entgegen der aktuellen Bewegungsrichtung ( $h_i(v) \geq 0$ ).

Empirisch findet man bei Gleitreibung z.B.  $h(v) \propto v$  und bei einer Luftreibung  $h(v) \propto v^2$ , vorausgesetzt die Geschwindigkeiten sind nicht zu groß [3]. Beachte, dass die kartesische Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \dot{\mathbf{r}}_i$  i.A. eine Funktion der generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}$ , deren Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}$  und der Zeit ist.

Um die Reibung nun in die ELG2 des  $i$ ten Teilchen zu integrieren, berechnen wir nun die generalisierte Reibungskraft (Erinnerung:  $v_i := |\mathbf{v}_i|$ )

$$Q_i^R = \sum_{j=1}^N \langle \mathbf{F}_j^R, \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \rangle \quad (268)$$

$$= - \sum_{j=1}^N \frac{h_j(|\mathbf{v}_j|)}{|\mathbf{v}_j|} \langle \mathbf{v}_j, \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \rangle \stackrel{(!)}{=} - \sum_{j=1}^N \frac{h_j(|\mathbf{v}_j|)}{|\mathbf{v}_j|} \langle \mathbf{v}_j, \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial \dot{q}_i} \rangle \quad (269)$$

$$= - \sum_{j=1}^N \frac{h_j(|\mathbf{v}_j|)}{|\mathbf{v}_j|} \langle \mathbf{v}_j, \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial \dot{q}_i} \rangle = - \sum_{j=1}^N \frac{h_j(|\mathbf{v}_j|)}{|\mathbf{v}_j|} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle \quad (270)$$

$$= - \sum_{j=1}^N \frac{h_j(|\mathbf{v}_j|)}{|\mathbf{v}_j|} \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{v}_j|^2}{\partial \dot{q}_i} = - \sum_{j=1}^N h_j(|\mathbf{v}_j|) \frac{\partial |\mathbf{v}_j|}{\partial \dot{q}_i} \quad (271)$$

$$= - \sum_{j=1}^N h_j(v_j) \frac{\partial v_j}{\partial \dot{q}_i} = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{j=1}^N \int_0^{v_j} dv h_j(v) . \quad (272)$$

Der letzte Schritt verwendet die Relation

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \int_0^{v_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)} dv h_j(v) = h_j(v_j) \frac{\partial v_j}{\partial \dot{q}_i} , \quad (273)$$

der aus dem Hauptsatz der Integralrechnung folgt; die obere Integralgrenze ist eine Funktion der Variablen  $\dot{q}_j$ . Der Schritt (!) verwendet die Relation  $\partial \mathbf{r}_j / \partial q_i = \partial \mathbf{v}_j / \partial \dot{q}_i$ , der in der obigen Nebenrechnung schon mal bewiesen wurde.

Deshalb können wir die generalisierte Reibungskraft

$$Q_i^R = -\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} \quad (274)$$

bequem aus der geschwindigkeitsabhängigen Dissipationsfunktion

$$P := \sum_{i=1}^N \int_0^{v_i} dv h_i(v) \quad (275)$$

ableiten, die einmal für das gesamte System ausgerechnet wird. Die ELG2 mit Reibung lauten dann

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (276)$$

Wichtig ist für die folgenden Diskussionen, dass der Dissipationsterm nicht aus der Lagrange-Funktion abgeleitet werden kann, sondern als Extrakraft in die Bewegungsgleichung eingeführt wird.

Als Beispiel betrachten wir nochmal den Reibungseffekt in einem mathematischen Pendel,

$$\mathbf{F}^R = -\alpha \dot{\mathbf{r}} = -h(v) \frac{\mathbf{v}}{v} \quad (277)$$

mit  $h(v) = \alpha v$ . Folglich ist nun die Dissipationsfunktion

$$P = \int_0^v dv' h(v') = \frac{\alpha}{2} v^2 = \frac{\alpha}{2} l^2 \dot{\phi}^2 \quad (278)$$

und hierdurch die generalisierte Reibungskraft des Freiheitsgrads  $\phi$

$$Q_\phi^R = -\frac{\partial P}{\partial \dot{\phi}} = \alpha l^2 \dot{\phi}, \quad (279)$$

in Übereinstimmung mit dem vorherigen Ergebnis.

## 6 Beschleunigte Bezugssysteme

Die Forminvarianz der Euler-Lagrange-Gleichungen bezüglich einer Punkttransformation können wir benutzen, um die Bewegungsgleichungen eines anderen Bezugssystems mit Koordinaten  $\mathbf{q}'(\mathbf{q}, t)$  aufzustellen. Insbesondere muss dieses Bezugssystem nicht notwendigerweise ein Inertialsystem sein. Als Beispiel konzentrieren wir uns hier auf rotierende Beobachter.

### 6.1 Rotierende Beobachter

Wir betrachten hierfür aus der Perspektive eines inertialen Beobachter B1 einen Körper unter dem Einfluß des konservativen Kraftfelds  $F(\mathbf{r})$ . Es sollen der Einfachheit halber keine Zwangsbedingungen für diesen Körper gelten. Die Lagrange-Funktion des Beobachters B1 ist

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 - U(\mathbf{r}) . \quad (280)$$

Zur Parametrisierung von  $\mathbf{r}(t)$  benutzt B1 die zeitlich konstanten Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  mit den Koordinaten  $x_i$ , d.h.  $\mathbf{r}(t) = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ .

Ein zweiter Beobachter B2 verwendet den gleichen Ursprung  $O \in E^3$  wie B1, befindet sich aber in Rotation: B2 benutzt eine rotierende, *zeitabhängige Basis*  $\mathbf{e}'_i(t)$  und die Koordinaten  $x'_i$ , um den Ort  $\mathbf{r}(t) = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 + x'_3 \mathbf{e}'_3$  des Körpers zu parametrisieren. Hierdurch ist zwar der Ortsvektor  $\mathbf{r}(t) \in V^3$  für B1 und B2 identisch, aber i.A. nicht deren Koordinaten  $x_i$  and  $x'_i$ .

Durch die Rotation seiner Basis wird B2 eine andere Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{r}}'(t)$  beobachten als der Beobachter B1. Beobachter B1 findet

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \mathbf{e}_i . \quad (281)$$

Der Beobachter B2 würde dem Körper die Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{r}}'(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i \mathbf{e}'_i(t) \quad (282)$$

zuordnen, basierend auf den Zeitableitungen  $\dot{x}'_i$  der Koordinaten und der Basis  $\mathbf{e}'_i$  zum Zeitpunkt  $t$ . Die Geschwindigkeitsvektoren  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  und  $\dot{\mathbf{r}}'(t)$  sind aber unterschiedlich, was man durch die folgende Rechnung



sehen kann ( $\dot{e}'_i = \boldsymbol{\omega} \times e'_i$ , siehe Abschnitt 1.5):

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i e'_i(t) + \sum_{i=1}^3 x'_i \dot{e}'_i(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i e'_i(t) + \sum_{i=1}^3 x'_i \boldsymbol{\omega} \times e'_i(t) = \dot{\mathbf{r}}'(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'(t). \quad (283)$$

Die Rotation der Basis B2 sei hier beschrieben durch den Vektor  $\boldsymbol{\omega}$  der Winkelgeschwindigkeit;  $\boldsymbol{\omega}$  darf sich prinzipiell auch mit der Zeit ändern. Beide Beobachter kommen also zu dem Einverständnis, dass sich  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  und  $\dot{\mathbf{r}}'(t)$  um  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'(t)$  unterscheiden.

Beachte, dass diese Darstellung koordinatenfrei ist: B2 misst tatsächlich eine andere Geschwindigkeit, nicht nur andere Geschwindigkeitskoordinaten des gleichen Vektors  $\dot{\mathbf{r}}$ . Das ist deshalb, weil B2 bei einer Geschwindigkeitsmessung auch die Bewegung seiner Basisvektoren sieht.

Wie sehen nun die Bewegungsgleichungen für B2 aus? Der Übergang von  $x_i$  nach  $x'_i(x_1, x_2, x_3, t)$  definiert eine Punkttransformation. Wegen der Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen erhalten wir die Bewegungsgleichungen der  $x'_i$  dadurch, dass wir die  $x_i$  in  $\mathcal{L}$  durch  $x_i(x'_1, x'_2, x'_3, t)$  ersetzen.

Dies klingt komplizierter als es in Wirklichkeit ist. Wir müssen hierfür nämlich nur die Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' ; \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' \quad (284)$$

in der Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , Gl. (280), substituieren

$$\mathcal{L}' = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'|^2 - U(\mathbf{r}') \quad (285)$$

$$= \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{r}}'|^2 + m \langle \dot{\mathbf{r}}', \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \rangle + \frac{m}{2} \langle \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \rangle - U(\mathbf{r}') \quad (286)$$

$$= \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{r}}'|^2 + m \langle \dot{\mathbf{r}}', \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \rangle + \frac{m}{2} (|\boldsymbol{\omega}|^2 |\mathbf{r}'|^2 - |\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}' \rangle|^2) - U(\mathbf{r}'). \quad (287)$$

Hier haben wir die Relation  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|^2$  verwendet. Durch diese Art der Herleitung mussten wir die Punkttransformation  $x_i = x_i(x'_1, x'_2, x'_3, t)$  nicht explizit angeben, sie ist aber indirekt durch die Koordinatendarstellung von  $\mathbf{r}'$  und  $\dot{\mathbf{r}}'$  in  $\mathcal{L}'$  enthalten.

Die Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}'$  enthält zwei neue Terme, die wir unterstrichen haben. Diese Terme sind verantwortlich für additive Extraterme – sogenannte *Scheinkräfte* – in den Bewegungsgleichungen des Beobachters B2,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{x}'_i} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'_i} = 0 \quad \forall i. \quad (288)$$

Um die Scheinkräfte zu berechnen, schreiben wir vorübergehend die neuen Terme in  $\mathcal{L}'$  als Funktion der Koordinaten  $x'_i$ . Dies ist nicht anders möglich, weil die Bewegungsgleichungen die Koordinaten  $x'_i$  explizit brauchen. Wir erhalten:

$$\mathcal{L}'_1 := m\langle \dot{\mathbf{r}}', \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \rangle = m \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \dot{x}'_i \omega'_j x'_k, \quad (289)$$

$$\mathcal{L}'_2 := \frac{m}{2} (|\boldsymbol{\omega}|^2 |\mathbf{r}'|^2 - |\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}' \rangle|^2) = \frac{m}{2} \sum_{i,j=1}^3 \omega_i^2 x_j^2 - \frac{m}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \omega_i x'_i \right)^2. \quad (290)$$

(Erinnerung:  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k$  in einer beliebigen orientierten Orthonormalbasis;  $\epsilon_{ijk}$  ist der Levi-Cevita-Tensor.) Beachte, dass diese *skalaren* Ausdrücke die zeitabhängigen Basisvektoren  $\mathbf{e}'_i(t)$  nicht explizit enthalten; nur deren Orthonormalität wurde verwendet.

Man erhält nun durch Anwendung von Gl. (288) auf  $\mathcal{L}'_1$  (Hinweis: (\*) benutzt  $\epsilon_{ijl} = -\epsilon_{jli}$ ):

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_1}{\partial \dot{x}'_l} = m \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ljk} \omega'_j x'_k, \quad (291)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'_1}{\partial \dot{x}'_l} = m \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ljk} (\dot{\omega}'_j x'_k + \omega'_j \dot{x}'_k) = m (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}')_l, \quad (292)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_1}{\partial x'_l} = m \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ijl} \dot{x}'_i \omega'_j \stackrel{(*)}{=} -m \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ijl} \omega'_j \dot{x}'_i = -m (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}')_l, \quad (293)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'_1}{\partial \dot{x}'_l} - \frac{\partial \mathcal{L}'_1}{\partial x'_l} = m (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}')_l + 2m (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}')_l. \quad (294)$$

Die entsprechenden Terme, die von  $\mathcal{L}'_2$  erzeugt werden, sind (BACCAB-Regel im letzten Schritt):

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_2}{\partial \dot{x}'_l} = 0, \quad (295)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_2}{\partial x'_l} = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 2\omega_i^2 x'_l - \frac{m}{2} 2 \sum_{i,j=1}^3 \omega'_i x'_j \omega'_l \quad (296)$$

$$= m x'_l \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 - m \omega'_l \sum_{i,j=1}^3 \omega'_i x'_j \quad (297)$$

$$= m \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle x'_l - m \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}' \rangle \omega'_l \quad (298)$$

$$= m (\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle \mathbf{r}' - \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}' \rangle \boldsymbol{\omega})_l \quad (299)$$

$$= -m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')_l, \quad (300)$$

$$\implies \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'_2}{\partial \dot{x}'_l} - \frac{\partial \mathcal{L}'_2}{\partial x'_l} = m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')_l. \quad (301)$$

Fassen wir diese Ergebnisse mit den anderen Termen der Bewegungsgleichungen von zusammen, dann können wir für den Beobachter B2 konstatieren:

$$m\ddot{\mathbf{r}}' + \underline{m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'} + \nabla U(\mathbf{r}') = 0. \quad (302)$$

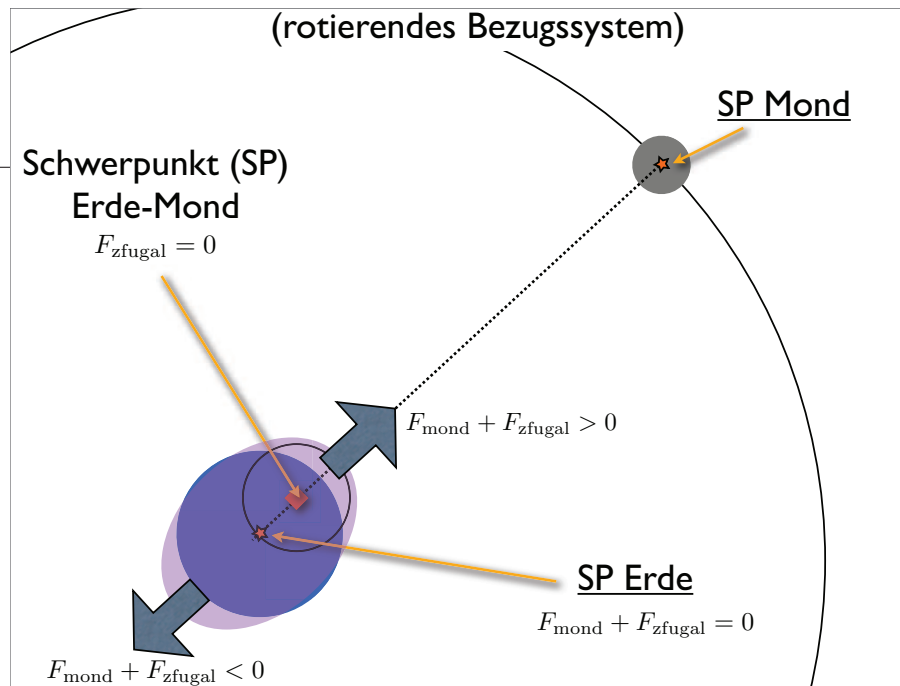
Der Bewegungsgleichung  $m\ddot{\mathbf{r}} + \nabla U(\mathbf{r}) = 0$  des inertialen Beobachter B1 sind demnach neue Terme hinzugefügt worden (unterstrichen). Diese Scheinkräfte des rotierenden Beobachters B2 sind die Corioliskraft ( $2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'$ ) – benannt nach Gaspard Gustave de Coriolis (\*1792-†1843) –, die Zentrifugalkraft ( $m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ ) und eine weitere Kraft  $m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'$ , die nur bei einer beschleunigten Rotation  $\dot{\boldsymbol{\omega}} \neq 0$  beobachtet wird.

Die Corioliskraft hat einen wichtigen Einfluß auf das Wettersystem der rotierenden Erde: Für den mitrotierenden Beobachter auf der Nordhalbkugel werden Luftmassen, die Tiefdruckgebieten entgegenströmen, durch die Corioliskraft gegen den Uhrzeigersinn abgelenkt, auf der Südhalbkugel hingegen in Uhrzeigersinn. Das Verhalten bei Hochdruckgebieten, von denen Luftmassen radial wegströmen, ist genau anders herum. Die Entstehung der Passatwinde in Äquatornähe oder der Verlauf des Golfstroms gehen auch auf die Corioliskraft zurück.

## 6.2 Erde-Mond-System

Generell wird die Beschreibung der Trajektorie in einem rotierenden System komplizierter, weil mehr Kräfte zu berücksichtigen sind. Es gibt jedoch Situationen, bei denen rotierende Bezugssysteme die Betrachtung einfacher werden lassen. Nehmen wir z.B. das Problem der Gezeiten der Meere im Erde-Mond-System. In grober Näherung umkreisen sowohl die Erde als auch der Mond den gemeinsamen Masse-schwerpunkt  $\mathbf{R}$  auf Kreisbahnen mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 2\pi/27.3d$  (Zweikörperproblem).

Setzen wir uns als Beobachter ruhend auf  $\mathbf{R}$  und rotieren unser Koordinatensystem exakt mit  $\omega$  um die Achse durch  $\mathbf{R}$  in Richtung des Drehimpulsvektor  $\mathbf{L}$  von Erde-Mond, dann befinden sich Erde und Mond



in Ruhe, etwa bei einem konstanten Abstand von  $\sim 3 \times 10^5$  km. Dass Erde und Mond trotz der Schwerkraft nicht aufeinander fallen, erklären wir uns in *diesem* Bezugssystem durch die Zentrifugalkraft, die genau die Schwerkraft in den Masseschwerpunkten von Mond und Erde kompensiert. Die mondzugewandte Seite der Erde, hingegen, ist etwas näher zum Mond. Weil dort die Mondschwerkraft größer ist, wird Wasser auf dieser Seite zum Mond gezogen. Auf der mondabgewandten Seite hingegen ist die Schwerkraft des Mondes kleiner wegen des  $\sim 12.000$  km größeren Abstands (die Erde hat einen Radius von  $\sim 6000$  km). Noch wichtiger: Dort ist die Zentrifugalkraft größer als die Schwerkraft des Mondes; das Gleichgewicht beider Kräfte ist ja im Erdmittelpunkt. Deshalb wird Wasser auf dieser Seite scheinbar vom Mond abgestoßen, wodurch ein mondabgewandter, zweiter Wassergezeitenberg entsteht.

Da sich die Erde noch um die eigene Achse dreht, durchläuft ein fester Beobachter auf der Erdoberfläche im Laufe eines Tages zwei Wasserberge und -täler (Flut und Ebbe). In einem Inertialsystem müsste das gleiche Phänomen durch die Massenträgheit der mitgeführten Erdozeane beschrieben werden.

## 7 Erhaltungsgrößen

Unsere Situation ist nun die Folgende. Um die Dynamik eines Systems von  $N$  Teilchen unter Zwangsbedingungen zu beschreiben (holonom; hier: nur 2. Art), stellen wir

1. die Lagrange-Funktion  $\mathcal{L} = T - U$  des Systems auf;
2. führen einen Satz generalisierter Koordinaten  $q_i$  ein, die die Zwangsbedingungen  $I_i(z, t) = 0$  erfüllen (Anzahl  $k$ ), und
3. erhalten für die  $q_i$  mit den ELG2  $N_k = 3N - k$  Differentialgleichungen 2. Ordnung in der Zeit  $t$ .
4. Die Bahnen  $r(q(t), t)$  sind dann formal durch die Lösungen  $q(t)$  bestimmt.

Der letzte Schritt (4) ist üblicherweise der, der am meisten Schwierigkeiten bereitet bzw. der analytisch nicht möglich ist. (Mittels numerischer Methoden kann man natürlich immer die Bewegungsgleichungen für *konkrete* Anfangsbedingungen oder Randbedingungen mit einer technisch begrenzten Genauigkeit lösen. Die analytische allgemeine Form der Lösungen ist aber vom theoretischen Standpunkt her interessanter.)

Wir hatten bei der Diskussion des Zweikörperproblems gesehen (Abschnitt 4), dass die Kenntnis von Erhaltungsgrößen, wie die der Energie oder des Drehimpulses, die Anzahl der freien Variablen des Problems reduziert. Dadurch wird es z.B. im Zweikörperproblem möglich, die Lösungen direkt durch Integrale auszudrücken. Deswegen sollte man so viele Erhaltungsgrößen wie möglich für ein gegebenes Problem finden. Außerdem verraten die Erhaltungsgrößen uns auch etwas über die Eigenschaften der Lösungen, ohne dass wir die Bewegungsgleichungen direkt lösen müssen. Wir beschäftigen uns hier mit dem Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen und den mathematischen Eigenschaften der Lagrange-Funktion.

## 7.1 Anzahl möglicher Erhaltungsgrößen

**Definition.** Wir verstehen unter einer Erhaltungsgröße eine Funktion  $I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  der Koordinaten  $\mathbf{q}$  und der Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}$ , die entlang der Trajektorie  $\mathbf{q}(t)$  konstant bzw. erhalten ist, d.h.

$$\frac{dI(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{dt} = 0 \quad \forall t. \quad (303)$$

Wieviele Erhaltungsgrößen lassen sich für ein System mit  $N$  Teilchen und  $k$  Zwangsbedingungen finden? Zunächst stellen wir fest: Um ein System von  $N_k$  Differentialgleichungen 2. Ordnung eindeutig zu lösen, benötigt man  $2N_k$  Integrationskonstanten. Diese können z.B. die Anfangsbedingungen  $\mathbf{q}_0 := (\mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0))$  zum Zeitpunkt  $t_0$  sein. Die eindeutige Lösung kann deshalb als Funktion von  $\mathbf{q}_0$  folgendermaßen geschrieben werden:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(\mathbf{q}_0, t) ; \quad \dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, t). \quad (304)$$

Das folgt aus dem Satz der eindeutigen Lösbarkeit von Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Die Anfangsbedingungen  $\mathbf{q}_0$  selbst sind trivialerweise Erhaltungsgrößen! Betrachten wir nämlich einen beliebigen Zeitpunkt  $t_1$  der Lösung  $\mathbf{q}(t)$ , die durch  $\mathbf{q}_0$  gegeben ist, dann können wir aus den Werten  $\mathbf{q}(t_1)$  und  $\dot{\mathbf{q}}(t_1)$  bei  $t_1$  wieder eine eindeutige Lösung der ELG2 konstruieren; wir nennen diese mal  $\hat{\mathbf{q}}(t)$ . Wir können dann mit  $\hat{\mathbf{q}}(t)$  jedem Zeitpunkt  $t_1$  einen Satz von Werten  $\hat{\mathbf{q}}(t_0)$  zuordnen. Diese Werte sind aber wegen der Eindeutigkeit der Lösung, d.h.  $\mathbf{q}(t) \equiv \hat{\mathbf{q}}(t)$ , für alle beliebigen Zeitpunkte  $t_1$  gleich. Die so konstruierten Werte  $\hat{\mathbf{q}}(t_0) = \mathbf{q}_0$  sind also  $2N_k$  Erhaltungsgrößen.

Weil die  $\mathbf{q}_0$  erhalten sind, kann jede beliebige andere Erhaltungsgröße  $I_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  des Systems als Funktion der Anfangsbedingungen  $\mathbf{q}_0$  ausgedrückt werden. Für jede beliebige Erhaltungsgröße findet man nämlich durch direktes Einsetzen,

$$I_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = I_i(\mathbf{q}(\mathbf{q}_0, t), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, t), t) =: \tilde{I}_i(\mathbf{q}_0, t) \stackrel{(*)}{=} \tilde{I}_i(\mathbf{q}_0), \quad (305)$$

eine Funktion, die nur von  $\mathbf{q}_0$  abhängt. Beachte (\*), dass wegen  $\dot{\mathbf{q}}_0 = 0$  und (Kettenregel)

$$\frac{dI_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{dt} = \frac{d\tilde{I}_i(\mathbf{q}_0, t)}{dt} = \sum_{j=1}^{N_k} \frac{\partial \tilde{I}_i(\mathbf{q}_0, t)}{\partial q_{0,j}} \dot{q}_{0,j} + \frac{\partial \tilde{I}_i(\mathbf{q}_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{I}_i(\mathbf{q}_0, t)}{\partial t} = 0 \quad (306)$$

$\tilde{I}_i(\mathbf{q}_0, t)$  nicht explizit von der Zeit  $t$  abhängen kann (rechts). Es kann folglich keine Erhaltungsgröße geben, die von  $\mathbf{q}_0$  unabhängig ist. Deshalb gibt es *maximal*  $2N_k$  unabhängige Erhaltungsgrößen.

Gleichzeitig ist  $2N_k$  auch die Mindestanzahl von Erhaltungsgrößen, weil die  $\mathbf{q}_0$  ja alle schon erhalten sind. Es gibt also *genau*  $2N_k$  Erhaltungsgrößen – zumindest, wenn  $\mathbf{q}$  und  $\dot{\mathbf{q}}$  von  $t_0 \neq t$  gewählt sein dürfen.

Nun stellt sich die Frage: Wenn alle denkbaren Erhaltungsgrößen  $I_i$  Funktionen von  $\mathbf{q}_0$  sind, warum sollen wir dann noch nach anderen Formen der Erhaltungsgrößen jenseits  $\mathbf{q}_0$  suchen? Leider helfen die  $\mathbf{q}_0$  nicht bei der Lösung der Bewegungsgleichungen. Um nämlich aus  $\mathbf{q}_0$  die Positionen  $\mathbf{q}(t)$  zu einem Zeitpunkt  $t \neq t_0$  zu erhalten, muss man immer noch die ELG2 lösen! *Diese* Erhaltungsgrößen etablieren keinen Zusammenhang zwischen den Orten und den Geschwindigkeiten zu Zeitpunkten  $t \neq t_0$ ; sie machen nur eine Aussage für  $t = t_0$ .

Ob sich Erhaltungsgrößen  $I_i$  finden lassen, die wie oben definiert, ausschließlich Funktionen der Zustandsvariablen  $\mathbf{q}(t)$  und  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  sind, ist eine völlig andere Frage! Von diesen gibt es im Allgemeinen weniger als  $2N_k$ . Wieviele es gibt, hängt von der Art des Problems ab. Je mehr wir finden, desto mehr lassen sich erlaubte Lösungen einschränken und das Problem dadurch vereinfachen, weil wir formal mit jedem  $I_i$  eine Zustandsvariable durch alle anderen ersetzen können. Wir benötigen deshalb Strategien, um Erhaltungsgrößen  $I_i$  zu finden, die immer Funktionen von  $\mathbf{q}$  und  $\dot{\mathbf{q}}$  zum betrachteten Zeitpunkt  $t$  sind (wie z.B. die Energie  $E$ ).

Es zeigt sich, dass Symmetrien der Lagrange-Funktion hier eine wichtige Rolle spielen. Unter einer Symmetrie von  $\mathcal{L}$  versteht man, dass wir die Koordinaten  $\mathbf{q}$  in einer bestimmten Art transformieren können, ohne die funktionale Form der Lagrange-Funktion zu verändern.

## 7.2 Zyklische Variablen

Die einfachste Symmetrie ist dann gegeben, wenn die Lagrange-Funktion für einen gegebenen Satz von Koordinaten  $q_i$  nicht direkt von  $q_i$  abhängt, d.h.  $\partial\mathcal{L}/\partial q_i = 0$ ;  $q_i$  kommt durch geeignete Wahl der Koordinaten einfach nicht in  $\mathcal{L}$  vor;  $\mathcal{L}$  ist dann symmetrisch bezüglich einer Verschiebung  $q_i \mapsto q_i + c$  mit der Konstanten  $c$ . Wir bezeichnen solche  $q_i$  als *zyklische Variablen*.

In diesem Fall erhalten wir aus den ELG2

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} =: \frac{dp_i}{dt} = 0. \quad (307)$$

Wir haben hier eine neue Größe eingeführt:

**Definition.** Wir bezeichnen

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (308)$$

als den zu  $q_i$  konjugierten Impuls oder auch kanonischen Impuls. Hiermit werden  $\{q_i, p_i\}$  sogenannte konjugierte Größen.

Folglich sind zyklische Variablen mit einem erhaltenen konjugierten Impuls verbunden, weil dann  $\dot{p}_i = 0$  oder  $p_i = \text{konst.}$

Als Beispiel betrachten wir das Zweikörperproblem. Die Lagrange-Funktion des äquivalenten Einkörperproblems ist in der Bahnebene mit Polarkoordinaten

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \dot{d}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\theta}^2 d^2 - U(d). \quad (309)$$

In  $\mathcal{L}$  taucht  $\theta$  wegen der Zentralkraft nicht explizit auf, wodurch  $\theta$  eine zyklische Variable des Zentralkraftproblems zweier Körper wird. Der konjugierte Impuls zu  $\theta$  lautet  $p_\theta = \mu d^2 \dot{\theta}$  und ist folglich eine Erhaltungsgröße. Wir erkennen hier in  $p_\theta = L$  den Betrag des Drehimpulses  $L = |\mathbf{L}|$  wieder. Hierdurch bietet es sich direkt an, schon in der Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}$  auch das  $\dot{\theta}$  gänzlich zu entfernen,

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \dot{d}^2 + \frac{p_\theta^2}{2\mu d^2} - U(d), \quad (310)$$

was uns erst einmal auf ein eindimensionales Problem in  $d$  führt. Haben wir das gelöst, benutzen wir die Konstanz von  $p_\theta$ , um  $\theta(t)$  durch Integration zu lösen.

Wir sehen also, eine Strategie ist es, alle zyklischen Variablen des Problems und deren erhaltene konjugierten Impulse zu identifizieren und dann in  $\mathcal{L}$  entsprechend durch Integrationskonstanten zu ersetzen. Problematisch ist hier allerdings, dass die Anzahl der zyklischen Variablen offensichtlich von der Wahl der Koordinaten  $q_i$  abhängt. Hier bestimmen also Glück und Erfahrung, wie weit man mit dieser Strategie kommt.



### 7.3 Symmetrien der Lagrange-Funktion

Zyklische Variablen sind also mit einer Verschiebungssymmetrie der Lagrange-Funktion verknüpft: Die Koordinatentransformation  $q_i \mapsto q_i + c$  der zyklischen Variablen mit der Konstanten  $c$  ändert nicht die Form von  $\mathcal{L}$ . Wir vermuten jedoch, dass es noch allgemeinere Koordinatentransformationen geben könnte, bezüglich der  $\mathcal{L}$  forminvariant sein könnte, und die evtl. mit Erhaltungsgrößen verknüpft sind. Allgemeiner suchen wir Transformationen, die die ELG2 Bewegungsgleichungen forminvariant lassen, die aus der Lagrange-Funktion abgeleitet werden. Dies ist der Leitgedanke im berühmten *Noether-Theorem* von Amalie Emmy Noether (\*1882-†1935), das wir hier in einer vereinfachten Form besprechen wollen. Das Noether-Theorem ist einer der Grundbausteine in der Formulierung der modernen theoretischen Physik.

Als allgemeine Koordinatentransformation stellen uns vor, dass wir einen gegebenen Satz von Koordinaten  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{N_k})$  stetig durch die Abbildung

$$q_i \mapsto q'_i(\mathbf{q}, t, \alpha) \quad \forall i \quad (311)$$

in einen neuen Satz Koordinaten  $\mathbf{q}' = (q'_1, \dots, q'_{N_k})$  transformieren. Diese Transformation hängt stetig von einem Parameter  $\alpha$  ab. Dieser Parameter ist so gewählt, dass wir für  $\alpha = 0$  die Identitätsabbildung erhalten, also  $q'_i(\mathbf{q}, t, \alpha = 0) = q_i$ ;  $\alpha = 0$  verändert die Koordinaten nicht. Außerdem soll  $q'_i = q'_i(\mathbf{q}, t, \alpha)$  invertierbar bezüglich  $\mathbf{q}$  sein; wir können die Transformation eindeutig nach  $q_i = q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)$  umformen.

Wie stellen wir nun fest, ob die Differentialgleichungen der neuen Koordinaten  $q'_i$  mit denen der  $q_i$  formal identisch sind? Um diese Frage zu beantworten, brauchen wir  $\mathcal{L}'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t)$ , die Lagrange-Funktion der neuen Koordinaten  $\mathbf{q}'$ . Hierzu invertieren wir die Koordinatentransformation, so dass wir nun  $q_i$  als Funktion der neuen Koordinaten  $q'_i$  ausdrücken können:

$$q_i = q_i(\mathbf{q}', t, \alpha) \quad \forall i . \quad (312)$$

Hierdurch definieren wir eine Punkttransformation, die uns von  $q_i$  nach  $q'_i$  bringt. Die Lagrange-Funktion der neuen Variablen folgt dann, wie schon besprochen, aus der alten durch Substitution

$$\mathcal{L}'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha) = \mathcal{L}(q(\mathbf{q}', t, \alpha), \dot{q}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha), t) \stackrel{?}{=} \mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t) . \quad (313)$$

Die rechte Seite ist entscheidend für eine Symmetrie der Lagrange-Funktion: *Sollte* die neue Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}'$  einfach die alte  $\mathcal{L}$  sein, nur mit den Variablen  $q_i$  eins-zu-eins durch  $q'_i$  und die Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  eins-zu-eins durch  $\dot{q}'_i$  ersetzt, dann *müssen* wegen der Forminvarianz der Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen die Differentialgleichungen für  $q'_i$  exakt wie die von  $q_i$  aussehen. Die Form der Lösungen  $q'_i(t)$  ist dann mit denen von  $q_i(t)$  identisch. Das sind genau die Fälle, die wir suchen. Wir weisen hier nochmal darauf hin, dass wegen

$$\dot{q} = \frac{d}{dt}q(q', t, \alpha) = \dot{q}(q', \dot{q}', t, \alpha) \quad (314)$$

die Geschwindigkeiten  $\dot{q}$  Funktionen der neuen Koordinaten  $q'$  und deren Geschwindigkeiten  $\dot{q}'$  sind.

Eine Forminvarianz ist nicht selbstverständlich, was wir anhand eines Beispiels demonstrieren wollen. Nehmen wir mit

$$\mathcal{L}(z, \dot{z}) = \frac{m}{2}\dot{z}^2 + \kappa z^2 \quad (315)$$

die eindimensionale Bewegung eines Oszillators der Auslenkung  $z$ . Wir versuchen nun die Transformation

$$z' = z + \alpha . \quad (316)$$

Hierdurch ist  $\dot{z}' = \dot{z}$  und die neue Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}'(z', \dot{z}', \alpha) = \mathcal{L}(z' - \alpha, \dot{z}', \alpha) = \frac{m}{2}\dot{z}'^2 + \kappa z'^2 + 2\kappa\alpha z' + \kappa^2\alpha^2 \neq \mathcal{L}(z', \dot{z}') . \quad (317)$$

Diese Lagrange-Funktion ist also *nicht* invariant bezüglich der Translation im obigen Sinne. Verschieben wir den Massenpunkt weiter nach außen, kriegen wir natürlich eine Trajektorie mit größerer Amplitude! (Das Problem ist hier, dass die rückstellende Kraft eine äußere Kraft ist – das System ist nicht abgeschlossen.)

## 7.4 Erhaltungsgröße aufgrund einer Symmetrie der Lagrange-Funktion

Wieso folgt nun aus der Bedingung für Symmetrie in Gl. (313) rechts eine Erhaltungsgröße? Um dies zu zeigen, differenzieren wir die transformierte Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}'$  nach dem Parameter  $\alpha$ ,

$$\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t, \alpha) = \mathcal{L}(q(q', t, \alpha), \dot{q}(q', \dot{q}', t, \alpha), t) \quad (318)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}(\mathbf{q}', t, \alpha), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha), t)}{\partial \alpha}. \quad (319)$$

Dies schreiben wir nun als (Kettenregel)

$$\frac{\partial \mathcal{L}'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{L}(\mathbf{q}(\mathbf{q}', t, \alpha), \frac{d}{dt} \mathbf{q}(\mathbf{q}', t, \alpha), t) \quad (320)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_k} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{dq_i(\mathbf{q}', t, \alpha)}{dt} \right) \quad (321)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_k} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right) \quad (322)$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N_k} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right). \quad (323)$$

In dieser Rechnung wurde an den unterstrichenen Stellen die Euler-Lagrange-Gleichung von  $q_i$  verwendet. Diese Relation ist soweit für alle Transformationen  $\alpha$  gültig. Im Falle einer Symmetrie von  $\mathcal{L}$  bezüglich der Koordinatentransformation  $\mathbf{q}'(\mathbf{q}, t, \alpha)$  ist aber nun zusätzlich

$$\mathcal{L}'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha) = \mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t). \quad (324)$$

Sprich die neue Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}'$  nicht explizit von  $\alpha$  abhängig, d.h.  $\partial \mathcal{L}' / \partial \alpha = 0$  oder bei  $\alpha = 0$ :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N_k} \left( \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \right) =: \frac{dI}{dt} = 0. \quad (325)$$

Die neue Größe

$$I := \sum_{i=1}^{N_k} \left( \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \right) = \sum_{i=1}^{N_k} \left( p_i \left. \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \right) \quad (326)$$

ist demnach zeitlich konstant bei einer Symmetrie;  $I$  ist eine Erhaltungsgröße. Wir sagen: Die Symmetrie von  $\mathcal{L}$  bezüglich der Transformation  $\mathbf{q}(\mathbf{q}', t, \alpha)$  erzeugt die Erhaltungsgröße  $I$ .

Beachte für diesen Ausdruck, dass  $\mathbf{q}' = \mathbf{q}$  bei  $\alpha = 0$ . Wir können also nach der Ableitung  $\partial / \partial \alpha$  alle  $q'_i$  durch  $q_i$  ersetzen, wodurch  $I$  nur eine Funktion der Koordinaten  $q_i$ , deren Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  und der Zeit  $t$  sein kann. Aus diesem Grunde wurde der Spezialfall  $\alpha = 0$  betrachtet.

## 7.5 Translationen

Als erste Anwendung betrachten wir ein (zwangsfreies) System bei dem alle Kraftfelder nur von den relativen Abständen  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  der Teilchen bestimmt werden. Die Koordinaten seien hier einfache kartesische Koordinaten. Wir müssen hierfür die Lagrange-Funktion nicht hinschreiben, um zu wissen, dass ein Translation

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \alpha \mathbf{e} \iff \mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \alpha \mathbf{e} \quad (327)$$

in eine beliebige Richtung  $\mathbf{e}$  das Potenzial  $U(\mathbf{z})$  in  $\mathcal{L}$  nicht verändert.

Der Vektor  $\mathbf{r}'_i$  entspricht dem Ort des  $i$ ten Teilchens aus der Perspektive eines Beobachters mit einem um  $\alpha \mathbf{e}$  verschobenen Ursprung. Alternativ können wir dies aber auch als eine *aktive* Translation betrachten: Wir verschieben alle Ortsvektoren  $\mathbf{r}_i$  der Teilchen um den konstanten Vektor  $-\alpha \mathbf{e}$ .

Da sich hier bei der zeitlich konstanten Translation aber relativen Abstände und die Geschwindigkeiten nicht ändern,  $\dot{\mathbf{z}}' = \dot{\mathbf{z}}$ , erhalten wir sofort

$$\mathcal{L}'(\mathbf{z}', \dot{\mathbf{z}}', t, \alpha) = \mathcal{L}(\mathbf{z}', \dot{\mathbf{z}}', t); \quad (328)$$

die Bewegungsgleichungen für  $\mathbf{r}'_i$  sind die gleichen wie die für  $\mathbf{r}_i$ . Also ist

$$I_{\text{trans}} = \sum_{i=1}^N \left\langle \mathbf{p}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i(\mathbf{r}'_i, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right\rangle \Big|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{p}_i, \mathbf{e} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i, \mathbf{e} \right\rangle = \text{konst.} \quad (329)$$

Wir haben hier die Teilsummen  $p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}$  aller Bewegungsrichtungen desselben Teilchens  $i$  zum Skalarprodukt  $\langle \mathbf{p}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \alpha} \rangle$  zusammengefasst (Kartesische Koordinaten). Mit  $\mathbf{p}_i = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{x}_i \mathbf{e}_x + \partial \mathcal{L} / \partial \dot{y}_i \mathbf{e}_y + \partial \mathcal{L} / \partial \dot{z}_i \mathbf{e}_z$  bezeichnen wir den konjugierten Impuls zu  $\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{e}_x + y_i \mathbf{e}_y + z_i \mathbf{e}_z$ . Falls wir keine geschwindigkeitsabhängigen Potenziale  $U$  haben, ist dies der “normale” Impuls  $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ . Da wir die Richtung  $\mathbf{e}$  beliebig wählen dürfen, muss also

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \text{konst.} \quad (330)$$

sein. Aus der Translationsinvarianz folgt also sofort die Erhaltung des Gesamtimpulses  $\mathbf{P}$ .

Das ist eine bemerkenswerte Schlussfolgerung! Sie beruht auf der Annahme, dass die Bewegungsgleichungen sich formal bei einer Verschiebung des gesamten (abgeschlossenen) Systems von  $\mathbf{r}_i \mapsto \mathbf{r}_i - \alpha \mathbf{e}$  im Raum nicht verändern. Man spricht hier auch von der Homogenität des Raumes.

## 7.6 Drehungen

Anstatt das System zu verschieben, wollen wir nun alle Orte  $\mathbf{r}_i$  um eine beliebige Achse entlang  $\mathbf{e}$  durch den Ursprung  $\mathcal{O}$  um den beliebigen Winkel  $\alpha$  rotieren, d.h.

$$\mathbf{r}'_i = D(\alpha; \mathbf{e})\mathbf{r}_i \iff \mathbf{r}_i = D(-\alpha; \mathbf{e})\mathbf{r}'_i \quad (331)$$

Hier sei  $D(\alpha; \mathbf{e})$  eine Drehung um den Winkel  $\alpha$  um die Ursprungsachse entlang  $\mathbf{e}$ .

Hängt das Potenzial nur von den Beträgen  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  der relativen Abstände ab, dann wird dieses durch eine *einmalige* Drehung, wie der oben beschriebenen, nicht verändert, d.h.  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = |\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j|$ . Das Gleiche gilt für die Beträge  $|\dot{\mathbf{r}}_i| = |\dot{\mathbf{r}}'_i|$  der Geschwindigkeiten, die im kinetischen Anteil der Lagrange-Funktion stehen. Wir ignorieren hier der Einfachheit halber wieder geschwindigkeitsabhängige Potenziale. Es gilt also wiederum exakt

$$\mathcal{L}'(\mathbf{z}', \dot{\mathbf{z}}', t, \alpha) = \mathcal{L}(\mathbf{z}', \dot{\mathbf{z}}', t), \quad (332)$$

so dass wegen (Hinweis:  $D(\alpha; \mathbf{e})\mathbf{r} = \mathbf{r} + \alpha\mathbf{e} \times \mathbf{r} + \mathcal{O}(\alpha^2)$ )

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}_i(\mathbf{r}'_i, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial D(-\alpha; \mathbf{e})}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \mathbf{r}'_i = -\mathbf{e} \times \mathbf{r}'_i \quad (333)$$

nun die Größe (Hinweis:  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle$ )

$$I_{\text{rot}} = - \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{p}_i, \mathbf{e} \times \mathbf{r}_i \rangle = - \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{e}, \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \rangle = - \langle \mathbf{e}, \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \rangle \quad (334)$$

für *beliebige* Drehachsen  $\mathbf{e}$  erhalten ist. Dies bedeutet aber, wie haben den Gesamtdrehimpuls

$$\mathbf{L} := \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \quad (335)$$

als Erhaltungsgröße nun auf eine Invarianz der Bewegungsgleichungen bezüglich einer Rotationen des Gesamtsystems zurückgeführt. Die Rotationsinvarianz von  $\mathcal{L}$  erzeugt einen erhaltenen Gesamtdrehimpuls. Man bezeichnet diese Eigenschaft auch als Isotropie des Raumes.

## 7.7 Zeitverschiebungen

Können wir die Energieerhaltung bei skleronom-holonomen Zwangsbedingungen auch aus einer Symmetrie ableiten? (Rheonome Zwangsbedingungen können Energie ins System pumpen oder dem System entziehen;  $E$  ist deshalb dort i.A. nicht erhalten.)

Ja, unter Umständen. Man kann unter Umständen eine Energieerhaltung aus einer Zeitverschiebung

$$t' = t + \alpha \quad (336)$$

ableiten, wenn diese die Lagrange-Funktion unverändert läßt (Zeitsymmetrie). Wir brauchen also eine Zeit-Invarianz der Lagrange-Funktion,

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t + \alpha) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) . \quad (337)$$

Das ist aber trivial, wenn  $\mathcal{L}$  nicht explizit von der Zeit abhängt, d.h.

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial t} = 0 . \quad (338)$$

Diese Zeitverschiebung kann jedoch nicht mit dem Formalismus gehandhabt werden, den wir oben besprochen haben, weil die Zeit  $t$  keine generalisierte Koordinate darstellt. (Der Formalismus kann aber entsprechend erweitert werden.)

Wir können dennoch eine Erhaltungsgröße ableiten, indem wir uns die totale Zeitableitung von  $\mathcal{L}$  entlang der Kurve  $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$  ansehen (Kettenregel):

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N_k} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N_k} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} ; \quad (339)$$

die unterstrichenen Terme benutzen die Euler-Lagrange-Gleichung von  $q_i$ . Es folgt also allgemein durch Umformung, dass

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left( \mathcal{L} - \sum_{i=1}^{N_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) =: -\frac{d\mathcal{H}}{dt} , \quad (340)$$

oder dass die

**Hamiltonfunktion.**

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N_k} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (341)$$

genau dann erhalten ist,  $d\mathcal{H}/dt = 0$ , wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt,  $\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$ . Die Hamilton-Funktion wird später noch ausführlicher diskutiert, weil sich mit ihr eine alternative Beschreibung der Bewegungsgleichungen konstruieren läßt.

Weiterhin ist die Funktion  $\mathcal{H}$  unter bestimmten Bedingungen identisch mit der Gesamtenergie  $E = T + U$ , wodurch wir die Energieerhaltung unter diesen Bedingungen als Konsequenz aus der Zeitinvarianz von  $\mathcal{L}$  gezeigt hätten. Eine Bedingung hierfür ist, dass wir Ruhekoordinaten als Darstellung wählen bzw. ein Ruhesystem als Referenzsystem wählen.

**Ruhesystem.** *Unter einem Ruhesystem versteht man eine Darstellung mit generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}$ , die nicht explizit von der Zeit abhängt, d.h. nur  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{q})$  anstatt der allgemeineren Darstellung  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{q}, t)$ .*

Zusätzlich brauchen wir konservative Kräfte, für die automatisch Folgendes gilt ( $\partial U/\partial \dot{q}_i = 0$ ):

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} . \quad (342)$$

Man findet hiermit in einem Ruhesystem (siehe Anmerkung für den letzten Schritt):

$$\sum_{i=1}^{N_k} p_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{N_k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T . \quad (343)$$

In diesem Fall erhalten wir den gesuchten Zusammenhang

$$\mathcal{H} = 2T - \mathcal{L} = 2T - T + U = T + U = E . \quad (344)$$

Nochmal: Die Hamilton-Funktion ist bei einer Zeitverschiebungs-Invarianz der Lagrange-Funktion *immer* eine Erhaltungsgröße für skleronom-holonome Systeme; vorausgesetzt, dass sich Kräfte aus einem (evtl. auch geschwindigkeitsabhängigen) Potenzial ableiten lassen. Sie ist aber nur dann identisch mit der Gesamtenergie  $E$  des Systems, wenn wir zusätzlich

1. nur konservative Kräfte  $\mathbf{F}_z = -\nabla U(\mathbf{z})$  betrachten, und
2. Koordinaten eines Ruhesystems zur Darstellung wählen.

**Anmerkung** Die Bedingung (2) ist notwendig, damit die kinetische Energie  $T(\mathbf{q}, \lambda \dot{\mathbf{q}}, t) = \lambda^2 T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  erfüllt, da  $T$  dann nur Summanden enthält, die ausschließlich quadratisch in den Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  sind. Die kinetische Energie ist dann eine *homogene Funktion* bezüglich der Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}$ . Das sieht man durch die folgende Rechnung (Kettenregel; beachte:  $\mathbf{r}_i$  ist hier nicht explizit  $t$ -abhängig):

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \langle \dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle \quad (345)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left\langle \sum_{j=1}^{N_k} \frac{\partial \mathbf{r}_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \dot{q}_j, \sum_{l=1}^{N_k} \frac{\partial \mathbf{r}_i(\mathbf{q})}{\partial q_l} \dot{q}_l \right\rangle \quad (346)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{N_k} \left( \sum_{i=1}^N m_i \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}_i(\mathbf{q})}{\partial q_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_i(\mathbf{q})}{\partial q_l} \right\rangle \right) \dot{q}_j \dot{q}_l \quad (347)$$

$$=: \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{N_k} g_{jl}(\mathbf{q}) \dot{q}_j \dot{q}_l . \quad (348)$$

Alle Summanden sind quadratisch in den Geschwindigkeiten, d.h.  $\propto \dot{q}_j \dot{q}_l$  mit den (metrischen) Koeffizienten  $g_{jl}(\mathbf{q})$ .

Aus dieser Homogenität der kinetischen Energie folgt dann durch Ableitung nach  $\lambda$  sowohl

$$\frac{\partial T(\mathbf{q}, \lambda \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \lambda} = 2\lambda T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (349)$$

als auch (Kettenregel)

$$\frac{\partial T(\mathbf{q}, \lambda \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{N_k} \frac{\partial(\lambda \dot{q}_i)}{\partial \lambda} \frac{\partial T(\mathbf{q}, \lambda \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial(\lambda \dot{q}_i)} = \sum_{i=1}^{N_k} \dot{q}_i \frac{\partial T(\mathbf{q}, \lambda \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial(\lambda \dot{q}_i)} . \quad (350)$$

Aus dem Spezialfall  $\lambda = 1$  ergibt sich hieraus

$$2T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^{N_k} \dot{q}_i \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} , \quad (351)$$

was oben verwendet wurde.

Aus der allgemeinen Form der kinetischen Energie von Teilchen in Ruhekoordinaten (Gl. 348) können wir direkt die Bewegungsgleichung des  $i$ ten Teilchens ohne Krafteinwirkung ableiten (aus den ELG2 mit  $U = 0$ ):

$$\ddot{q}_k + \sum_{i,j=1}^{N_k} \Gamma_{ij}^k \dot{q}_i \dot{q}_j = 0 , \quad (352)$$



wobei  $g^{kl}(\mathbf{q}) = [g^{-1}(\mathbf{q})]_{kl}$  (Indices oben!) die Inverse der Matrix  $g(\mathbf{q})$  ist, deren Koeffizienten durch  $[g(\mathbf{q})]_{kl} = g_{kl}(\mathbf{q})$  gegeben sind. Die Koeffizienten

$$\Gamma_{ij}^k := \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N_k} g^{kl}(\mathbf{q}) \left( \frac{\partial g_{jl}(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial g_{il}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial g_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_l} \right) \quad (353)$$

nennt man Christoffel-Symbole; bei kartesischen Koordinaten ist einfach  $\Gamma_{ij}^k = 0$ . In der Differentialgeometrie und der mathematischen Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie spielt dieser Formalismus eine wichtige Rolle. Gl. (352) beschreibt die Bewegung entlang einer Geodäten. Sollte die Lagrange-Funktion noch ein Potenzial  $U$  enthalten, dann wird evtl. die rechte Seite von null verschieden sein, nämlich  $\partial U / \partial q_k$ .

## 7.8 Eichinvarianz der Lagrange-Funktion\*

Um Koordinatentransformation zu finden, die die Bewegungsgleichungen forminvariant lassen, haben wir uns nur solche angesehen, die die Lagrange-Funktion forminvariant lassen. Letzteres ist eine hinreichende Bedingung für die Forminvarianz der Bewegungsgleichungen, aber keine notwendige Bedingung.

Dies kann mit dem folgenden Beispiel illustriert werden. Betrachten wir einen Stein der Masse  $m$ , der in  $z$ -Richtung frei im erdnahen Schwerfeld fallen kann. Die Lagrange-Funktion dieses Szenarios ist in einem geeigneten Koordinatensystem (siehe Abschnitt 2.7)

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{z}^2 + mgz. \quad (354)$$

Die Bewegungsgleichung von  $z$  ist

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = m\ddot{z} - mg = 0. \quad (355)$$

Wir wenden nun eine Translation

$$z' = z + \alpha \quad (356)$$

auf die Lagrange-Funktion an:

$$\mathcal{L}'(z', \dot{z}', \alpha) = \mathcal{L}(z' - \alpha, \dot{z}') = \frac{m}{2} \dot{z}'^2 + mgz' - mg\alpha \neq \mathcal{L}(z', \dot{z}'). \quad (357)$$

Der konstante Term  $mg\alpha$  verletzt unser obiges Suchkriterium für Symmetrien von  $\mathcal{L}$ , weil  $\mathcal{L}$  in diesem Fall seine funktionale Form ändert. Jedoch erhalten wir trotzdem eine Bewegungsgleichung für  $z'$ , die mit der von  $z$  identisch ist,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{z}'} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial z'} = m\ddot{z}' - mg = 0, \quad (358)$$

weil der Extraterm  $mg\alpha$  in  $\mathcal{L}'$  nicht von  $z'$  oder  $\dot{z}'$  abhängt. Folglich deckt unsere Symmetriebedingung in Gl. (313) nicht alle möglichen Fälle ab. Hier gibt es noch Spielraum, um mehr Erhaltungsgrößen zu finden!

Eine Erweiterung der Symmetriebedingung erhält man dadurch, dass man sich für Transformationen mit folgender Eigenschaft interessiert:

$$\mathcal{L}'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha) = \mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t) + \frac{dF(\mathbf{q}', t, \alpha)}{dt}. \quad (359)$$

Wir erlauben nun, dass sich das transformierte  $\mathcal{L}'$  und  $\mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t)$  um die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion  $F(\mathbf{q}', t, \alpha)$ , die nicht von den Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}'$  abhängig ist, unterscheiden dürfen. In unserem obigen Beispiel ist dieses  $F(z', t, \alpha) = mg\alpha t$ .

Wir lassen diese Verallgemeinerung deshalb zu, weil ein Summand der Art  $dF(\mathbf{q}, t)/dt$  die ELG2 nicht ändern kann (der Parameter  $\alpha$  ist hier unerheblich). Man kann *immer* eine solche Funktion einer beliebigen Lagrange-Funktion anfügen. Wir nennen diese Freiheit die *Eichinvarianz* der Lagrange-Funktion.

Wieso das so ist, kann man u.a. durch direktes Nachrechnen finden. Wegen der Kettenregel findet man (Beachte:  $F = F(\mathbf{q}, t)$  hat per. def. *keine*  $\dot{q}_i$ -Abhängigkeit):

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{j=1}^{N_k} \frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial t} = \dot{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t); \quad (360)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i}; \quad (361)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{dF}{dt} = \sum_{j=1}^{N_k} \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial t}; \quad (362)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{dF}{dt} = \sum_{j=1}^{N_k} \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial t}. \quad (363)$$

Da die Ableitungen der letzten beiden Zeilen das gleiche Ergebnis liefern, kann der Summand  $dF(\mathbf{q}, t)/dt$  in  $\mathcal{L}$  aber keinen Beitrag zur Bewegungsgleichung von  $q_i$  produzieren, da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{dF}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{dF}{dt} = 0. \quad (364)$$

Die ELG2 für  $q_i$  aus  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{L} + dF/dt$  sind deshalb exakt identisch. Dies bestätigt die Eichinvarianz der Lagrange-Funktion. Voila!

Welche Erhaltungsgröße folgt nun aus der Forminvarianz der Lagrange-Funktion unter Berücksichtigung der Eichinvarianz? Die neue Symmetriebedingung in Gl. (359) schreiben als

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N_k} \left( \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \right) = \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial F(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}. \quad (365)$$

Wir erlauben also nun, dass sich  $\mathcal{L}'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha)$  und  $\mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t)$  um einen Summanden unterscheiden dürfen. Bringen wir alle Terme auf eine Seite, dann erhalten wir

$$\frac{dJ}{dt} := \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^{N_k} \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \right), \quad (366)$$

wobei

$$J := \sum_{i=1}^{N_k} \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \quad (367)$$

unsere neue Erhaltungsgröße ist. Wenn wir die Eichinvarianz ignorieren,  $F = 0$ , dann erhalten wir den speziellen Fall, der eingangs diskutiert wurde.

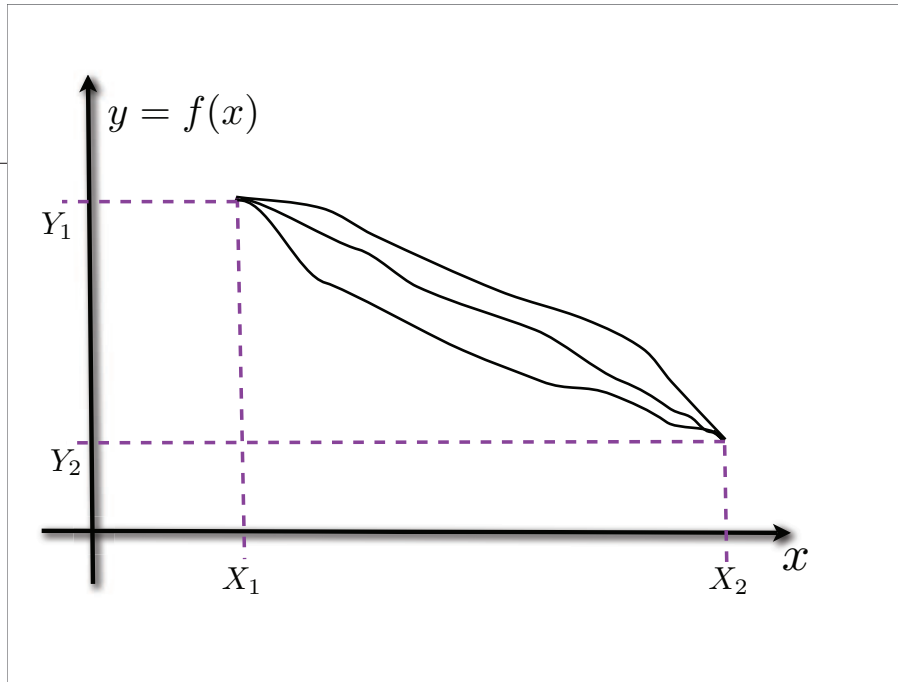
Kehren wir zurück zum Beispiel des fallenden Steins, dann finden wir

$$F(z', t, \alpha) = mgt\alpha ; \quad \left. \frac{\partial F(z', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = mgt \quad (368)$$

und deswegen die Erhaltungsgröße

$$J = m\dot{z} - mgt = \text{konst.} \quad (369)$$

Dies ist das Zeitintegral der Bewegungsgleichung Gl. (355)!

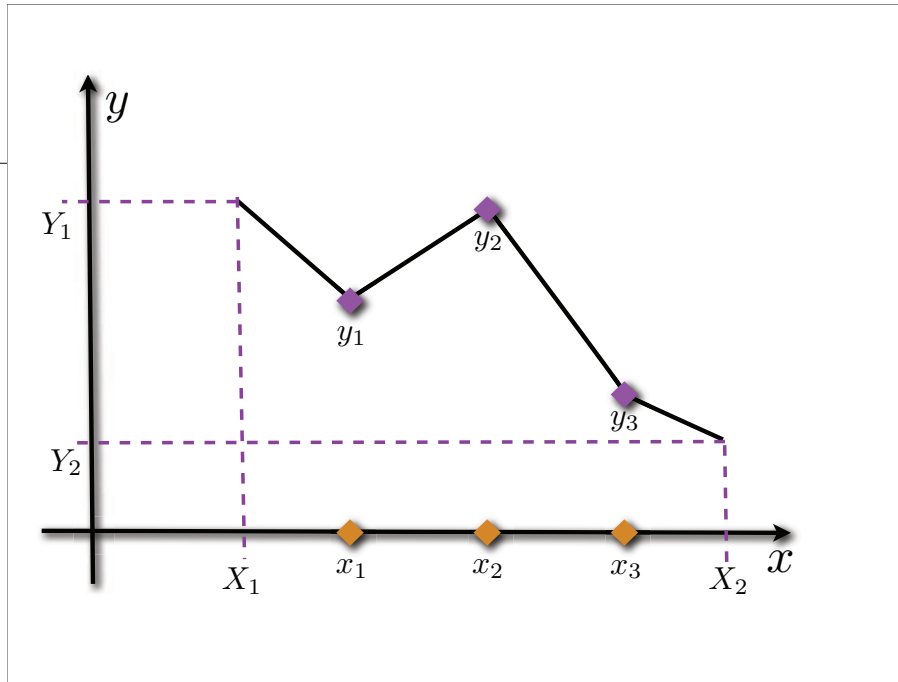


## 8 Hamiltonsches Prinzip

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lassen sich ohne des D'Alembertschen Prinzips auch aus einem fundamentaleren Prinzip ableiten, das wir das *Hamiltonsche Prinzip* oder das Prinzip der kleinsten/stationären Wirkung nennen. Mathematisch ist dies eine andere Herleitung der klassischen Mechanik. Diese bietet erstmal keinen praktischen Vorteil in der Behandlung von konkreten Problemen. Vom theoretischen Standpunkt aus gesehen allerdings, wirft dieses Prinzip jedoch ein neues Licht auf die Natur physikalischer Gesetze und schlägt darüber hinaus eine Brücke zur Quantenmechanik.

### 8.1 Variationsrechnung

Zum Einstieg diskutieren wir hier ein typisches Problem der Variationsrechnung. Wir betrachten eine stetige und differenzierbare Funktion  $f(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , die durch zwei feste Punkte  $Y_1 = f(X_1)$  und  $Y_2 = f(X_2)$  bei  $X_1$  und  $X_2$  gehen soll. Wir fragen uns, wie die Kurve  $(x, f(x))$  zwischen den Punkten  $X_1 < x < X_2$  verlaufen muss, damit ihre Länge minimal wird. Wir können die Antwort eigentlich schon raten:  $f(x)$  ist



eine Gerade. Aber wir wollen beweisen, dass die Gerade von allen möglichen  $f(x)$  wirklich die kürzeste Länge hat.

Dieses Problem ist wahrscheinlich anders als die Extremwertprobleme, denen Sie bisher begegnet sind. Bisher wurden in diese Fragestellungen vermutlich immer auf eine Funktion  $F(\mathbf{y})$  endlich vieler Unbekannten  $\mathbf{y}$  zurückgeführt, die so gewählt werden müssen, dass die Funktion  $F$  extremal wird. Eine notwendige Bedingung lokaler Extrema ist bekanntlich ein verschwindender Gradient  $\nabla F(\mathbf{y}) = 0$  am Punkt eines Extremums, was der übliche Lösungsansatz ist. Das Problem hier ist nun etwas komplizierter: Wir haben überabzählbar viele Unbekannte – die Werte der Funktion bei  $y = f(x)$  – die gefunden werden müssen, um die Gesamtlänge  $F[f(x)] \in \mathbb{R}^{>0}$  zu minimieren; jeder Wert  $f(x)$  bei  $x \in ]X_1, X_2[$  ist eine Unbekannte.

Bevor wir uns über die Lösung Gedanken machen, müssen wir das Problem erst mal sauber definieren. Beginnen wir mit einer Näherung. Wir denken uns  $N$  Stützpunkte  $x_i$  mit  $X_1 = x_0 < x_i < x_{N+1} = X_2$  und  $i = 1 \dots N$ , an denen wir die Werte  $y_i = f(x_i)$  der gesuchten Funktion bestimmen wollen. Die  $x_i$  seien sortiert, d.h.  $x_i < x_{i+1}$ . Der Abstand der direkten Nachbarn  $x_i$  und  $x_{i+1}$  ist konstant, d.h.  $x_{i+1} - x_i = \Delta x = (X_2 - X_1)/N$ .

Wir verbinden nun alle benachbarte Punkte  $(x_i, y_i)$  mit Linien, um eine Approximation von  $f(x)$  zu erhalten. Die Gesamtlänge aller Verbindungslinien ist

$$F_N[y_i; x_i] = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{\Delta x^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} = \Delta x \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{1 + \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{\Delta x^2}}, \quad (370)$$

mit festen Werten an den Endpunkten  $y_0 = Y_1$  und  $y_{N+1} = Y_2$ . Diese Kurvenlänge hat  $N$  endlich viele Unbekannte  $y_i$ . In dieser Näherung sieht das Problem der Minimallänge so aus wie das oben besprochene mit endlich vielen Unbekannten  $y_i$ . Aber eigentlich interessieren wir uns doch für den Grenzfall

$$F[f(x)] = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N[y_i; x_i] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta x \sqrt{1 + \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{\Delta x^2}} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}; \quad f'(x) := \frac{df(x)}{dx} \quad (371)$$

und Lösungen  $f(x)$ , die dieses sogenannte *Funktional*  $F[f(x)]$  extremal werden lassen. Ein Funktional bildet eine gesamte Funktion auf  $\mathbb{R}$  ab. Verwendet haben wir hier neben der Definition des Riemann-Integrals ("Reihe von infinitesimalen Größen") die Definition des Differenzenquotienten

$$\lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} = f'(x_i). \quad (372)$$

Wie finden wir eine Funktion  $f(x)$ , die  $F[f(x)]$  extremal werden läßt? Im Falle der Näherung  $F_N[y_i; x_i]$  wäre dies klar. Wir würden nach  $y_i$  mit den Eigenschaften

$$\frac{\partial F_N[y_i; x_i]}{\partial y_i} = 0 \quad \forall y_1, \dots, y_N \quad (373)$$

suchen. Wir wissen aber nicht, wie wir Gradienten  $F[f(x)]$  bezüglich  $f(x)$  zu bilden haben. Deswegen sehen wir uns nochmal den Fall der Näherung  $F_N$  an: Haben wir für  $F_N$  die Extremwerte  $\hat{y}_i$  gefunden, dann sagt uns die Bedingung (373) auch, dass eine kleine Variation  $\delta y_i$  beim Extremum  $\hat{y}_i$  den Wert von  $F_N$  nicht in linear Ordnung verändern wird, d.h. (Taylor-Reihe bei  $\hat{y}_i$ )

$$F_N[\hat{y}_i + \epsilon \delta y_i; x_i] = F_N[\hat{y}_i; x_i] + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial F_N[\hat{y}_i; x_i]}{\partial \hat{y}_i} \delta y_i \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) = F_N[\hat{y}_i; x_i] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (374)$$

Dies ist nun aber eine alternative Bedingung der Extremwerte  $\hat{y}_i$ , die wir auf  $F[f(x)]$  übertragen können. Nehmen wir nämlich an, wir haben eine Extremalkurve  $\hat{f}(x)$  des Funktionals  $F[f(x)]$  gefunden,

dann erwarten wir, dass eine kleine Variation dieser Kurve,

$$f(x, \epsilon) = \hat{f}(x) + \epsilon \delta f(x), \quad (375)$$

mit jeder *beliebigen* Variation  $\delta f(x)$  – auch eine Funktion von  $x$  – das Funktional  $F[f(x, \epsilon)]$  in linear Ordnung in  $\epsilon$  konstant hält, d.h.

$$F[\hat{f}(x) + \epsilon \delta f(x)] = F[\hat{f}(x)] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (376)$$

Da die Randwerte bei  $X_1$  und  $X_2$  gegeben sind, soll die Variation allerdings dort mit  $\delta f(x) = 0$  verschwinden;  $f(x)$  ist fest vorgegeben an den Eckpunkten. Anders ausgedrückt: Wir suchen Extremalkurven  $\hat{f}(x)$  mit  $\hat{f}(X_1) = Y_1$  und  $\hat{f}(X_2) = Y_2$ , die

$$\left. \frac{dF[\hat{f}(x) + \epsilon \delta f(x)]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad \forall \delta f(x) \quad (377)$$

erfüllen. Die Betonung liegt auf “für beliebigen Variationen  $\delta f(x)$ ” (mit Randbedingungen).

Dies probieren wir jetzt für unserer Eingangsproblem der kürzesten Verbindung zweier Punkte aus:

$$\frac{dF[\hat{f}(x) + \epsilon \delta f(x)]}{d\epsilon} = \int_{X_1}^{X_2} dx \frac{d}{d\epsilon} \sqrt{1 + [\hat{f}'(x) + \epsilon \delta f'(x)]^2} = \int_{X_1}^{X_2} dx \frac{\hat{f}'(x) \delta f'(x) + 2\epsilon [\delta f'(x)]^2}{\sqrt{1 + [\hat{f}'(x) + \epsilon \delta f'(x)]^2}}. \quad (378)$$

Bei  $\epsilon = 0$  entspricht dies

$$\left. \frac{dF[\hat{f}(x) + \epsilon \delta f(x)]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{X_1}^{X_2} dx \frac{\hat{f}'(x)}{\sqrt{1 + [\hat{f}'(x)]^2}} \delta f'(x) = \int_{X_1}^{X_2} dx \frac{\hat{f}'(x)}{\sqrt{1 + [\hat{f}'(x)]^2}} \frac{d}{dx} \delta f(x) \quad (379)$$

$$= \int_{X_1}^{X_2} dx \left( \frac{d}{dx} \left[ \frac{\hat{f}'(x)}{\sqrt{1 + [\hat{f}'(x)]^2}} \delta f(x) \right] - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\hat{f}'(x)}{\sqrt{1 + [\hat{f}'(x)]^2}} \right] \delta f(x) \right) \quad (380)$$

$$= \left[ \frac{\hat{f}'(x)}{\sqrt{1 + [\hat{f}'(x)]^2}} \delta f(x) \right]_{X_1}^{X_2} - \int_{X_1}^{X_2} dx \frac{d}{dx} \left[ \frac{\hat{f}'(x)}{\sqrt{1 + [\hat{f}'(x)]^2}} \right] \delta f(x) \quad (381)$$

$$= - \int_{X_1}^{X_2} dx \frac{d}{dx} \left[ \frac{\hat{f}'(x)}{\sqrt{1 + [\hat{f}'(x)]^2}} \right] \delta f(x). \quad (382)$$

Der unterstrichene Term in der vorletzten Zeile verschwindet, weil eine Variation an den Eckpunkten nicht erlaubt ist,  $\delta f(X_1) = \delta f(X_2) = 0$ . In der obigen Rechnung haben wir die Integration ab der zweiten Zeile partiell ausgeführt, um die Ableitung  $\delta'f(x)$  der Variation beseitigen zu können. Im Gegensatz zu  $\delta f(x)$  sind nämlich die Variationen von  $\delta'f(x)$  bei unterschiedlichen Werten  $x$  nicht unabhängig voneinander; der Differentialkoeffizient der Ableitung kombiniert benachbarte unabhängige Variationen  $\delta f(x)$ .

Da  $F[f(x, \epsilon)]$  für beliebige Variationen  $\delta f(x)$  in 1. Näherung verschwinden soll, muss nun der Faktor vor  $\delta f(x)$  im Integranden der letzten Zeile der obigen Gleichung für alle  $x \in [X_1, X_2]$  verschwinden,

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\hat{f}'(x)}{\sqrt{1 + [\hat{f}'(x)]^2}} \right] = 0 \quad (383)$$

$$\iff \frac{\hat{f}'(x)}{\sqrt{1 + [\hat{f}'(x)]^2}} = \text{konst.} =: C \quad (384)$$

$$\implies [\hat{f}'(x)]^2 = C^2(1 + [\hat{f}'(x)]^2) \quad (385)$$

$$\iff [\hat{f}'(x)]^2 = \frac{C^2}{1 - C^2} = \text{konst.} \quad (386)$$

Dies ist nur möglich, wenn die erste Ableitung von  $f(x)$  eine Konstante ergibt, d.h.  $\hat{f}'(x) = \text{konst.}$ , was nur für eine Gerade  $\hat{f}(x) = ax + b$  mit den Konstanten  $a$  und  $b$  erfüllt werden kann.

Wir haben also durch Variation der Lösungskurve bewiesen, dass eine Gerade die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist! Zur genauen Bestimmung der Geraden, muß man noch die Randbedingungen bei  $X_1$  und  $X_2$  berücksichtigen. Uns reicht hier die Feststellung, dass das Variationsproblem auf eine Differentialgleichung zurückgeführt wurde; wir sind das Funktional  $F[f(x)]$  selbst dadurch los geworden.

Die hier durchgeführten Rechenschritte werden in der Theorie der *Funktionalableitungen* formalisiert, die wir an dieser Stelle nicht wiedergeben können. Wir weisen hier nur noch auf eine wichtige Relation hin, die man sich merken sollte:

$$\delta'f(x) = \frac{d}{dx} \delta f(x) = \delta \frac{df(x)}{dx} = \delta f'(x) \quad (387)$$

Die Ableitung einer Variation entspricht also der Variation der Ableitung. Folglich ist auch

$$\frac{d^n}{dx^n} \delta f(x) = \delta \frac{d^n f(x)}{dx^n} \quad (388)$$



## 8.2 Prinzip der stationären Wirkung

Im letzten Abschnitt wurde ein Variationsproblem besprochen, bei dem das Funktional nur eine Funktion der Ableitung  $f'(x)$  war. Um zu sehen, was Variationsprobleme mit der klassischen Mechanik zu tun haben, betrachten wir nun ein allgemeineres Problem

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt \Phi(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t), \quad (389)$$

bei dem ein Funktional  $S$  von unseren generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{N_k})$  und deren Entwicklung  $\mathbf{q}(t)$  mit der Zeit  $t$  abhängen soll;  $S$  gibt uns also für jede gegebene Kurve  $\mathbf{q}(t)$  zwischen  $t_0 \leq t \leq t_1$  einen Wert. Dieser Wert wird durch die Funktion  $\Phi$  im Integranden bestimmt. Wir wollen den Integranden unbestimmt lassen, um ein allgemeines Variationsproblem zu lösen.

Wir fragen uns, wie die Kurve  $\mathbf{q}(t)$  gewählt werden muss, um einen Extremwert für  $S[\mathbf{q}(t)]$  zu erhalten. Wir gehen genauso wie eben vor und variieren eine Kurve  $\hat{q}_i(t)$  durch

$$q_i(t, \epsilon) = \hat{q}_i(t) + \epsilon \delta q_i(t). \quad (390)$$

Hierdurch wird (wir setzen hier  $\hat{q}_i = q_i$  und schreiben das Argument von  $\Phi(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$  im Integranden nicht aus;  $\delta'q(t) = d\delta q(t)/dt$ )

$$\left. \frac{dS[\mathbf{q}(t) + \epsilon \delta \mathbf{q}(t)]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} dt \left. \frac{d}{d\epsilon} \Phi(\mathbf{q}(t) + \epsilon \delta \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \epsilon \delta' \mathbf{q}(t), t) \right|_{\epsilon=0} \quad (391)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{N_k} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \delta' q_i(t) \right) \quad (392)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{N_k} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i(t) \right) \quad (393)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{N_k} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \delta q_i(t) - \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i(t) + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t) \right] \right) \quad (394)$$

$$= \underbrace{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t) \right) \Big|_{t_0}^{t_1}} + \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{N_k} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t). \quad (395)$$

Der erste unterstrichene Term verschwindet wieder, weil die Variation  $\delta q_i(t)$  an den Randpunkten  $t_0$  und  $t_1$  nach Definition null ist. Damit der zweite Term für beliebige Variationen  $\delta q_i(t)$  verschwindet, muss der

Ausdruck in der Klammer null sein, also

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i. \quad (396)$$

Wir beobachten nun mit Erstaunen, dass diese Differentialgleichungen formal mit den ELG2 identisch sind, die wir aus dem D'Alembertschen Prinzip und den Newtonschen Axiomen abgeleitet haben. Ersetzen wir nämlich  $\Phi = \mathcal{L}$ , dann erhalten wir

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = \text{stationär} \iff \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i. \quad (397)$$

Die Lösungen der ELG2 mit den Randbedingungen  $\mathbf{q}(t_0)$  und  $\mathbf{q}(t_1)$  sind also genau die Kurven  $\mathbf{q}(t)$ , bei denen das obige Funktional  $S[\mathbf{q}(t)]$  stationär wird; eine Variation von  $S[\mathbf{q}(t)]$  an dieser Stelle ändert in 1. Ordnung das Funktional nicht. Wir nennen dieses Funktional die *Wirkung* der Kurve  $\mathbf{q}(t)$ . Da die Wirkung häufig ein Minimum als lokales Extremum hat, nennen wir diesen Ansatz das Prinzip der kleinsten Wirkung. Wir schreiben dies auch als  $\delta S[\mathbf{q}(t)] = 0$ .

Zusammenfassen kann man also sagen, wir haben gezeigt, dass wir mithilfe der ELG2 letztlich nur die kürzeste Verbindung zweier Randpunkt  $\mathbf{q}(t_0)$  und  $\mathbf{q}(t_1)$  berechnen. Die Länge zweier benachbarter Punkte  $\mathbf{q}(t + dt)$  und  $\mathbf{q}(t)$  wird hierbei mit der Metrik bzw. infinitesimalen Wirkung  $\mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)dt$  gemessen.

**Anmerkung** Dieses Prinzip ist, soweit wie es beurteilen können, fundamental. Wir können die klassische Bewegungsgleichungen von Teilchen und sogar die Bewegungsgleichungen von Kraftfeldern darauf reduzieren (Feldtheorien). Wie in der klassischen Physik lassen sich auch die Bewegungsgleichungen der Wellenfunktionen und Quantenfelder in der Quantenmechanik hierauf zurückführen. Richard P. Feynman (\*1918–†1988) konnte außerdem zeigen, dass die Wirkungen  $S[\mathbf{q}(t)]$  *aller* Wege  $\mathbf{q}(t)$ , die zwei Punkte  $\mathbf{q}(t_0)$  und  $\mathbf{q}(t_1)$  verbinden, die quantenmechanische Wahrscheinlichkeit bestimmt, mit der ein Teilchen, das bei  $\mathbf{q}(t_0)$  beobachtet wurde, wieder bei  $\mathbf{q}(t_1)$  beobachtet werden kann. Die Bewegung von Teilchen in der klassischen Mechanik hingegen wird nur von dem einzigen Weg  $\mathbf{q}(t)$  bestimmt, der durch  $\delta S[\mathbf{q}(t)] = 0$  gegeben ist.

Im Rahmen des Hamiltonschen Prinzips wird die Eichinvarianz der Lagrange-Funktion sehr offen-

sichtlich. Addieren wir eine totale Zeitanleitung  $dF(\mathbf{q}, t)/dt$  zu  $\mathcal{L}$ , dann ändert sich die Wirkung

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) + \underline{F(\mathbf{q}(t), t)} \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (398)$$

nur an den Randpunkten (unterstrichener Term). Diese sind bei einer Variation aber fest, so dass sich wieder die ursprünglichen Bewegungsgleichungen für  $q_i$  ergeben. Übrigens geht das nur, wenn  $dF(\mathbf{q}, t)/dt$  i.A. keine Funktion der Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}$  ist.

### 8.3 Euler-Lagrange-Gleichungen 1. Art\*

Mittels des Hamiltonischen Prinzips können wir auch Bewegungsgleichungen für Probleme 1. Art herleiten. Diese sind mechanische Probleme mit Zwangsbedingungen, bei denen wir keine generalisierten Koordinaten finden können, die alle Zwangsbedingungen automatisch erfüllen. Darüber hinaus lassen sich mit diesem Ansatz auch u.U. nicht-holonome Probleme lösen.

Wir stellen uns also vor, wir haben trotz der generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}$  noch  $N_z$ , i.A. nicht-holonome Zwangsbedingungen ( $\dot{\mathbf{q}}$  enthalten),

$$f_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \quad \forall i = 1 \dots N_z, \quad (399)$$

die mit der Problemstellung verknüpft sind. Die Bewegungsgleichung ergeben sich hier immer noch aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung  $\delta S[\mathbf{q}(t)]$ , aber nun mit den Nebenbedingungen in Gl. (399).

Ein Extremwertproblem mit Nebenbedingungen kann man mithilfe der Methode der *Lagrangeschen Multiplikatoren* lösen, wobei für jede Nebenbedingung eine neue Variable  $\lambda_i$  eingeführt wird. In unserem Fall der funktionalen Beschreibung der Wirkung haben wir  $N_z$  Nebenbedingungen für *jeden beliebigen Zeitpunkt*  $t$ ;  $\mathbf{q}(t)$  und  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  sind bei jedem  $t$  eingeschränkt. Wir brauchen deshalb einen Multiplikator  $\lambda_i(t)$  für jeden Zeitpunkt;  $\lambda_i(t)$  wird dadurch zeitabhängig. Folgen wir hiermit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren, dann lautet das Variationsproblem nun

$$\delta S[\mathbf{q}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)] = \delta \left[ \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) - \sum_{i=1}^{N_z} \lambda_i(t) f_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right) \right] = 0. \quad (400)$$

Genauso wie bei die Koordinaten  $\mathbf{q}(t)$  müssen wir jetzt  $\lambda_i(t)$  variieren, um die Funktionen  $\hat{\mathbf{q}}(t)$  und  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t)$  zu finden, bei denen  $S[\mathbf{q}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)]$  extremal wird. Die Bewegungsgleichungen für  $\lambda_i(t)$ , die sich aus dem

Variationsprinzip ergeben, sind einfach die Gleichungen (399). Die neuen Bewegungsgleichungen für  $q_i(t)$  sind nach wie vor durch die allgemeine Lösung Gl. (396) gegeben, oder

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{N_z} \left[ \frac{d}{dt} \left( \lambda_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_i} \right) - \lambda_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial q_i} \right] = 0 \quad \forall i. \quad (401)$$

Wir sehen also, man muss für jede Zwangsbedingung, die nicht durch die richtige Wahl der generalisierten Koordinaten beseitigt werden kann, eine zusätzliche Lösung  $\lambda_i(t)$  finden. Diese sind eindeutig durch die Nebenbedingungen  $f_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0$  bestimmt. Der neue Term in den Bewegungsgleichungen der  $q_i$  entspricht der generalisierten Zwangskraft aller  $N_z$  Nebenbedingungen (unterstrichen).

## 9 Starre Körper

Bisher haben wir entweder nur einzelne Punktteilchen oder Systeme von  $N$  Punktteilchen betrachtet. Körper, deren physikalische Ausdehnung nicht vernachlässigt werden kann, fallen nicht direkt in diese Kategorien. Man kann diese Körper aber als ein Vielteilchensystem oder ein Kontinuum von vielen Punktmassen beschreiben, das sehr restriktiven Zwangsbedingungen ausgesetzt ist.

Der einfachste Fall ist der eines *starren Körpers*, d.h. ein Körper, der nicht deformierbar sein soll. Dies bedeutet, wir können den Körper zwar verschieben (drei Freiheitsgrade) oder im Raum drehen (drei Freiheitsgrade), aber niemals die relativen Abstände  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  seiner Bestandteile verändern. Hierdurch reduziert sich die Beschreibung der starren Körper auf maximal sechs Koordinaten  $q_i$ .

Die Anzahl der Freiheitsgrade wollen wir in der folgenden Betrachtung erst mal noch weiter beschränken, indem wir nur Systeme betrachten, bei denen entweder der Massenschwerpunkt  $\mathbf{R}$  des Körpers im (inertialen) Beobachtersystem festgehalten wird, oder bei denen ein beliebiger anderer Punkt des Körpers für den Beobachter in Ruhe ist. Wir bezeichnen den ruhenden Punkt als Drehpunkt des Körpers. Hierdurch müssen wir nur die Orientierung des Körpers im Raum als frei gegeben betrachten (drei Freiheitsgrade). O.B.d.A. legen wir den Drehpunkt in der Ursprung  $O$  des Beobachters.

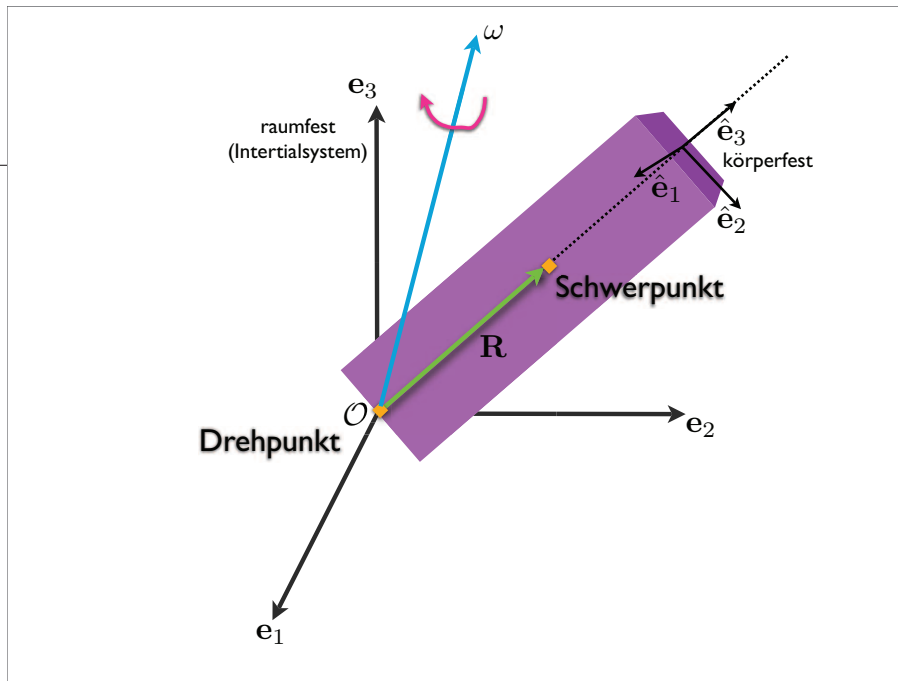
Unser Ziel im Folgenden ist es, eine dynamische Beschreibung der eines starren Körpers mit festem Drehpunkt zu finden. Genauer: Wir suchen die Bewegungsgleichungen der Orientierung des Körpers in einem äußeren Kraftfeld.

### 9.1 Drehimpuls

Wir beginnen mit der Frage, wie groß der Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{L}$  eines starren Körpers ist. Allgemein hatten wir diese Frage schon im Abschnitt über Vielteilchensysteme beantwortet,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}}. \quad (402)$$

Hier bezeichnet  $\mathbf{L}' = \sum m_i \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i$  den Drehimpuls im Schwerpunktsystem;  $\mathbf{r}'_i$  und  $\dot{\mathbf{r}}'_i$  sind die Orte und Geschwindigkeiten im Schwerpunktsystem.



Der neue Fall hier ist etwas spezieller. Da die Abstände  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  zwischen zwei beliebigen Punkten als holonom-skleronome Zwangsbedingung immer gleich sein müssen, können alle Teilchenorte höchstens durch die gleichzeitige Rotation  $D(\alpha; \mathbf{e})$  um die gleiche Rotationsachse  $\mathbf{e}$  bewegt werden,  $|D(\alpha; \mathbf{e})\mathbf{r}_i - D(\alpha; \mathbf{e})\mathbf{r}_j| = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ . Wir fassen, wie vorher schon, die Rotationsachse und die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  der Rotation um diese Achse durch den Vektor  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}$  der Winkelgeschwindigkeit zusammen. Die Rotationsachse geht hierbei immer durch den Drehpunkt  $O$ . Der Vektor  $\boldsymbol{\omega}$  darf natürlich die Richtung und den Betrag mit der Zeit ändern und wird dies i.A. auch tun.

Wie schon besprochen, sieht der Beobachter unter diesen Umständen eine Rotations-Geschwindigkeit eines Massepunktes  $i$  von

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i . \quad (403)$$

Folglich rotiert auch der Schwerpunkt bei  $\mathbf{R}$  mit der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$ . Das folgt aus  $\dot{\mathbf{R}} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i / M$  und der obigen Relation. Ein Punkt bei  $\mathbf{r}'_i$  relativ zu  $\mathbf{R}$  rotiert deshalb mit der Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = \dot{\mathbf{r}}'_i + \dot{\mathbf{R}} \quad (404)$$

und folglich im Schwerpunktsystem mit der Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{r}}'_i = \dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i . \quad (405)$$

Der Drehimpuls im Schwerpunktsystem wird hierdurch (“BACCAB”-Regel)

$$\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) = \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} |\mathbf{r}'_i|^2 - \mathbf{r}'_i \langle \mathbf{r}'_i, \boldsymbol{\omega} \rangle) . \quad (406)$$

Die Abbildung  $I'$ , definiert durch

$$\mathbf{L}' = I' \boldsymbol{\omega} := \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} |\mathbf{r}'_i|^2 - \mathbf{r}'_i \langle \mathbf{r}'_i, \boldsymbol{\omega} \rangle) , \quad (407)$$

ist interessant. Diese ist eine *lineare* Abbildung  $I' : V^3 \mapsto V^3$ , die auf den Vektor  $\boldsymbol{\omega}$  wirkt (ersetze oben  $\boldsymbol{\omega} = \lambda_1 \boldsymbol{\omega}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\omega}_2$ ; dann ist  $I' \boldsymbol{\omega} = \lambda_1 I' \boldsymbol{\omega}_1 + \lambda_2 I' \boldsymbol{\omega}_2$ ). Wir nennen  $I'$  den *Trägheitstensor* der Massenverteilung des Körpers. Üblicherweise wird der Trägheitstensor bezüglich einer (orthonormalen) Basis  $\{e_1, e_2, e_3\}$  angegeben, so dass wir den Drehimpuls  $\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^3 L'_i e_i$  als Matrixprodukt von Koordinaten darstellen können,

$$\begin{pmatrix} L'_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I'_{11} & I'_{12} & I'_{13} \\ I'_{21} & I'_{22} & I'_{23} \\ I'_{31} & I'_{32} & I'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} , \text{ oder } L'_i = \sum_{j=1}^3 I'_{ij} \omega_j , \quad (408)$$

wobei

$$I'_{kl} = \sum_{i=1}^N m_i [\delta_{kl}^K (x'^2_{i,1} + x'^2_{i,2} + x'^2_{i,3}) - x'_{i,k} x'_{i,l}] \quad (409)$$

gegeben ist für die Ortsvektoren  $\mathbf{r}'_i = \sum_j x'_{i,j} e_j$ . Diese Relation erhält man aus  $L'_i = \langle I' \boldsymbol{\omega}, e_i \rangle$  mit einer direkten Koordinatendarstellung von  $\mathbf{r}'_i$  und  $\boldsymbol{\omega}$ ;  $\delta_{kl}^K$  ist das Kronecker-Symbol.

Die Abbildung  $I'$  ist ein Tensor 2. Stufe, was bedeutet, dass sich dessen Koordinaten  $I'_{kl}$  unter einer Rotation  $D : V^3 \mapsto V^3$  wie das (dyadische) Produkt von zwei Vektoren transformieren:

$$x'_i \mapsto \sum_{k=1}^3 D_{ik} x'_k \implies I'_{ij} \mapsto \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 D_{ik} D_{jl} I'_{kl} ; \quad (410)$$

$D_{kl}$  ist die Koordinatendarstellung der Rotation bezüglich der Basis  $e_i$ . Die Diagonalelemente des Trägheitstensors nennt man *Trägheitsmomente*, die Nicht-Diagonalelemente *Deviationsmomente*.

Wir haben nun einen Ausdruck für den Drehimpuls  $L'$  im Schwerpunktsystem gefunden, der nur von  $\omega$  und dem Trägheitstensor  $I'$  abhängt. Der Gesamtdrehimpuls um den Ursprung  $O$  ist dann nach Gl. (402):

$$L = I'\omega + MR \times (\omega \times R) = I'\omega + M(\omega |R|^2 - R\langle R, \omega \rangle) = I'\omega + I_R\omega = (I' + I_R)\omega = I\omega . \quad (411)$$

Wir müssen also zum Trägheitstensor  $I'$  im Schwerpunktsystem den Tensor  $I_R$  addieren, um den Trägheitstensor  $I$  relativ zum Drehpunkt  $O$  zu erhalten. Der Tensor  $I_R$  ist der Trägheitstensor eines einzelnen Masspunktes der Masse  $M$ , der sich im Abstand  $R$  vom Drehpunkt befindet.

Anders ausgedrückt: Kennen wir den Trägheitstensor  $I'$  um den Schwerpunkt, dann erhalten wir den Trägheitstensor  $I$  für eine Rotation um jeden anderen Drehpunkt durch Addition von  $I_R$ ,  $I = I' + I_R$ .

**Anmerkung** Häufig betrachtet man bei starren Körpern ein Kontinuum  $N \rightarrow \infty$  von Punktmassen statt einer diskreten Menge von Punktmassen. In diesem Fall sind Summen der Art

$$\sum_{i=1}^N m_i f(\mathbf{r}_i) \quad (412)$$

durch Volumenintegrale zu ersetzen:

$$\int_V dV \rho(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) , \quad (413)$$

wobei  $dV$  ein infinitesimales Volumenelement der Masse  $dm = dV\rho(\mathbf{r})$  beim Ort  $\mathbf{r}$  darstellt;  $\rho(\mathbf{r})$  ist die Massendichte bei  $\mathbf{r}$ . Wir stellen uns also ein Massenkontinuum als Grenzfall unendlich vieler infinitesimaler Masspunkte vor. So wird beispielsweise im Kontinuum-Grenzfall das Trägheitsmoment

$$I'_{ij} = \int_V dV \rho(\mathbf{r}') \left[ \delta_{ij}^K (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) - x_i' x_j' \right] . \quad (414)$$

Konzeptionell ändert sich aber für die Diskussion der starren Körper hierdurch nichts.

Der Kontinuum-Fall ist im Übrigen auch der allgemeinere Fall. Wir können nämlich durch  $\rho(\mathbf{r})$  jede diskrete Verteilung von  $N$  Masspunkten  $(m_i, \mathbf{r}_i)$  als Summe von Dirac-Deltafunktionen darstellen,

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N m_i \delta_D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) . \quad (415)$$



## 9.2 Kinetische Energie

Wir kennen nun den Drehimpuls des starren Körpers. Was ist dessen gesamte kinetische Energie  $T$ ?

Diese erhalten wir, wie im Abschnitt 3 besprochen, aus der Summe der kinetischen Energie eines Punktteilchens der Masse  $M$  bei  $\mathbf{R}$  und der kinetischen Energie im Schwerpunktsystem,

$$T = \frac{1}{2} \langle m \odot \dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{z}} \rangle_z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{r}}'_i|^2 + \frac{M}{2} |\dot{\mathbf{R}}|^2. \quad (416)$$

Nun ist aber, wie eben gezeigt,  $\dot{\mathbf{r}}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$  und  $\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$ , so dass (Erinnerung:  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{a} \rangle$ )

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i|^2 + \frac{M}{2} |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}|^2 \quad (417)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \langle \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \rangle + \frac{M}{2} \langle \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \rangle \quad (418)$$

$$= \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \rangle + \frac{M}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{R} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \rangle \quad (419)$$

$$= \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \rangle + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_R \boldsymbol{\omega} \rangle = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \rangle = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{L} \rangle. \quad (420)$$

Die kinetische Energie des starren Körpers ergibt sich demnach einfach aus dem Skalarprodukt von  $\boldsymbol{\omega}$  und dem Drehimpuls  $\mathbf{L}/2$ . In Komponentenschreibweise bezüglich der (raumfesten) Beobachterbasis  $\mathbf{e}_i$  ist das eine quadratische Funktion in  $\omega_i$ , nämlich

$$T = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{L} \rangle = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 I_{kl} \omega_k \omega_l. \quad (421)$$

## 9.3 Potenzielle Energie

Was ist die gesamte potenzielle Energie des starren Körpers? Diese ergibt sich aus der Summe der potenziellen Energien aller Punktteilchen,

$$U(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^N U_i^{(a)}(\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \approx \sum_{i=1}^N U_i^{(a)}(\mathbf{R}); \quad (422)$$

$U_i^{(a)}(\mathbf{r})$  entspricht dem äußeren Potenzial des  $i$ ten Teilchens. Innere Potenziale können wir hier vernachlässigen, weil sich die relativen Abstände der Teilchen untereinander nicht verändern dürfen.

Die Approximation rechts nimmt zusätzlich an, dass die *Ausdehnung des Körpers klein* ist gegenüber den räumlichen Änderungen der Potentiale  $U_i^{(a)}$ ; das äußere Kraftfeld ist praktisch homogen für den Körper. In diesem Fall können wir uns für  $U(\mathbf{R})$  den Körper als Punktmasse bei  $\mathbf{R}$  vorstellen, der sich im Potenzial  $U(\mathbf{r}) = \sum_i U_i^{(a)}(\mathbf{r})$  bewegt. Im homogenen Erdschwerefeld wäre dies einfach  $U(\mathbf{r}) = -M\langle \mathbf{g}, \mathbf{r} \rangle$ , wobei  $\mathbf{g}$  der konstante Vektor der Schwerebeschleunigung am Erdboden ist, und ist  $M = \sum_i m_i$  die Gesamtmasse.

Ist diese Näherung nicht anwendbar, dann wird die potenzielle Energie von  $\mathbf{R}$  und der Orientierung des Körpers abhängen. (In diesem Fall unterscheidet man außerdem zwischen dem Schwerpunkt, der Punkt der effektiv das Potenzial des Körpers bestimmt, und dem Massenzentrum, das unserer Definition von  $\mathbf{R}$  entspricht.)

## 9.4 Lagrange-Funktion

Mit  $T$  und  $U$  können wir nun eine Lagrange-Funktion der starren Körpers aufschreiben (fester Drehpunkt:  $|\mathbf{R}| = \text{konst}$ ):

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \rangle - U(\mathbf{R}). \quad (423)$$

Einer Aufstellung der Bewegungsgleichungen scheint jetzt nichts mehr im Wege zu stehen. Jedoch müssen wir noch den Vektor  $\mathbf{R}$  und den Vektor  $\boldsymbol{\omega}$  durch drei generalisierte Koordinaten  $q_i$  (Orientierung des Körpers) und deren Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  im Falle von  $\boldsymbol{\omega}$  darstellen. Darüber hinaus hängt auch der Trägheitstensor  $\mathbf{I}$  von  $q_i$  ab, weil i.A. eine andere Orientierung des Körpers die Massenverteilung des Körpers für den Beobachter verändert.

Um Bewegungsgleichungen finden zu können, benötigen wir nun eine geeignete Parametrisierung der Orientierung des Körpers und eine damit einhergehende Parametrisierung des Trägheitstensors.

## 9.5 Hauptträgheitsachsen

Eine geeignete Parametrisierung besteht darin, den Trägheitstensor in einem Koordinatensystem anzugeben, das mit dem Körper zusammen rotiert (*körperfest*). Diese bedeutet *nicht*, dass wir als Referenzsystem

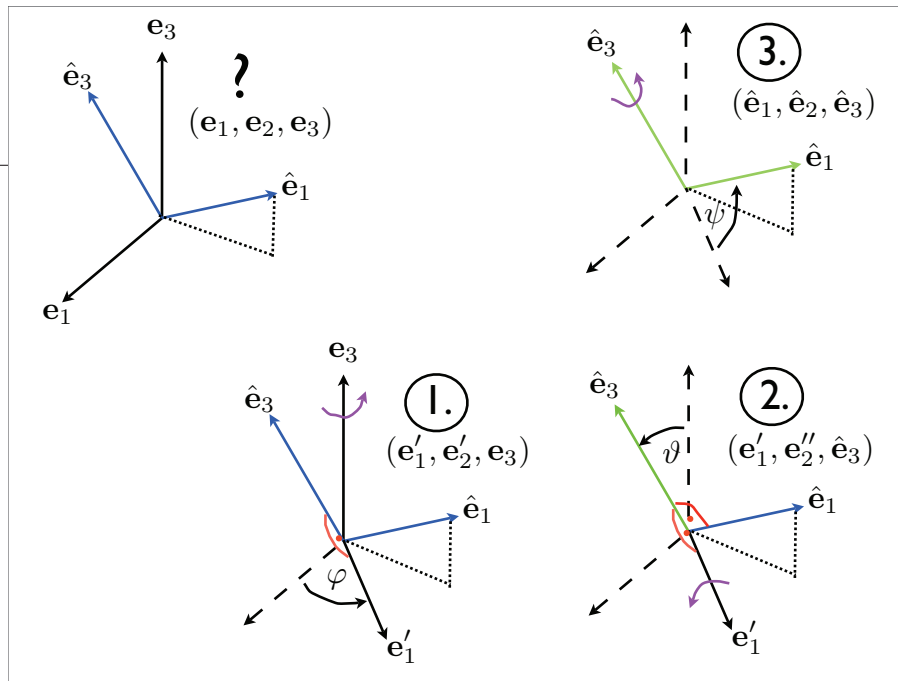
nun einen rotierenden Beobachter wählen; wir bleiben immer noch bei einem inertialen Beobachter (mit raumfester Basis  $e_i$ ), der den bewegten Körper betrachtet. Es bedeutet nur, dass wir uns zur Berechnung von  $T$  eine Basis  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  wählen, die an den starren Körper angeheftet wird. Bezüglich dieser Basis sind die Koeffizienten  $\hat{I}_{ij}$  des Trägheitstensors zeitlich konstant, da sich die Massenverteilung im (starren) Körper in der körperfesten Basis nicht ändert. Um  $T$  berechnen zu können, muss jedoch auch der Vektor  $\omega = \sum_i \hat{\omega}_i \hat{e}_i$  durch die körperfeste Koordinaten ausgedrückt werden.

Welches körperfeste Koordinatensystem das geeignetste für die Darstellung des Trägheitstensors? Grundsätzlich gibt es schließlich unendlich viele Möglichkeiten, eine Basis fest am Körper zu verankern. Eine optimale körperfeste Basis ist durch die Matrix  $I_{ij}$  selbst gegeben: das Eigensystem  $\hat{e}_i$  des Tensors  $I$ . Die Matrix  $I_{ij}$  ist eine symmetrische Matrix, d.h.  $I_{ij} = I_{ji}$ . Aus diesem Grunde ist die Matrix  $I_{ij}$  diagonalisierbar, was bedeutet, relativ zu den Eigenvektoren  $\hat{e}_i$  verschwinden alle Deviationsmomente von  $\hat{I}_{ij}$ :

$$((\hat{I}_{ij})) = \begin{pmatrix} \hat{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{I}_3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{I}\hat{e}_i = \hat{I}_i \hat{e}_i; \quad \hat{I}_{ij} = \langle \hat{e}_j, \mathbf{I}\hat{e}_i \rangle = \delta_{ij}^K \hat{I}_i. \quad (424)$$

Die Basisvektoren bzw. *Eigenvektoren*  $\hat{e}_i$  bestimmen die so-genannten *Hauptträgheitsachsen* der Massenverteilung im Körper;  $\hat{I}_i$  sind die *Eigenwerte* des Trägheitstensors, die sogenannten *Hauptträgheitsmomente*. Diese sind körperfest, d.h. sie rotieren zusammen mit dem Körper. Offensichtlich ist diese Basis eine gute Wahl zur Darstellung des Trägheitstensors, weil hier mindestens sechs (drei freie) Matrixelemente verschwinden. Haben wir einmal  $\hat{e}_i$  gefunden, dann ist deshalb  $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \hat{I}_i \hat{\omega}_i^2$  und die Parameter  $\hat{I}_i$  sind zeitlich konstant.

**Anmerkung** Wir bezeichnen Körper mit zwei Momenten  $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$  und einem dritten verschwindenden Moment  $\hat{I}_3 = 0$  als Rotator. Körper heißen unsymmetrisch, wenn alle Momente verschieden sind und symmetrisch, wenn zwei Momente gleich sind. Ein Kugelkreisel hat  $\hat{I}_1 = \hat{I}_2 = \hat{I}_3$ .



## 9.6 Euler-Winkel

Um nun noch die Koeffizienten  $\hat{\omega}_i$  im körperfesten Koordinatensystem zu bestimmen, brauchen wir zuerst drei Winkel, die die räumliche Orientierung des Körpers und damit die Orientierung der körperfesten Basis zur raumfesten Beobachterbasis eindeutig beschreiben. Hierfür wählen wir drei Winkelkoordinaten, die die raumfeste Basis  $e_i$  des Beobachters durch Rotation exakt in die körperfeste Basis  $\hat{e}_i$  eines gegebenen Zeitpunkts überführt.

Genau genommen brauchen wir jedoch dafür zu sorgen, dass diese Rotation zwei Basis-Vektoren  $e_i$  mit zwei Basis-Vektoren  $\hat{e}_i$  zur Deckung bringt. Ist das erfüllt, werden automatisch auch die dritten Basis-Vektoren übereinstimmen, weil  $\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1$  (bei gleicher Händigkeit). Deswegen konzentrieren wir uns nun auf ein Schema, das in drei Schritten mit drei unabhängigen Winkeln den Vektor  $e_3$  nach  $\hat{e}_3$  (“z-Achse”) und den Vektor  $e_1$  nach  $\hat{e}_1$  (“x-Achse”) rotiert.

Hierfür ist es gut, sich vorher das Folgende zu veranschaulichen. Angenommen, wir haben einen Vektor  $n$ , der senkrecht auf den Vektoren  $e$  und  $e'$  steht. Dann können wir *immer*  $e$  nach  $e'$  durch eine alleinige Rotation um die Achse entlang  $n$  überführen (das Rotationszentrum soll im Folgenden immer

$O$  sein). Dies liegt daran, dass sowohl  $e$  als auch  $e'$  in der (Rotations-)Ebene liegen, auf der  $n$  senkrecht steht. Durch diese Rotation wird der Vektor  $n$  selbst nicht verändert. Nach der Rotation ist  $e'$  insbesondere immer noch senkrecht zu  $n$ . Das Prozedere der Euler-Rotation ist nun wie folgt:

1. Die erste Rotationsachse sei durch den raumfesten Vektor  $e_3$  gegeben. Wir drehen die *gesamte* Basis  $e_i$  um diese Achse, nämlich um den Winkel  $\varphi$  bis der rotierte Vektor  $e_1$  senkrecht auf dem körperfesten Vektor  $\hat{e}_3$  steht. Wir nennen den rotierten Vektor  $e_1$  nun  $e'_1$ . Der neue Vektor  $e'_1$  soll wegen der Eindeutigkeit im gleichen Halbraum liegen wie  $\hat{e}_1$ .
2. Nach Schritt 1 steht  $e'_1$  senkrecht auf  $\hat{e}_3$  und  $e_3$ . Dies bedeutet, wir können durch Rotation der Basis aus Schritt 1 um einen Winkel  $\vartheta$  entlang  $e'_1$  nun den Vektor  $e_3$  in den körperfesten Vektor  $\hat{e}_3$  überführen. Der Vektor  $e'_1$  wird durch diese Rotation nicht verändert. Insbesondere ist  $e'_1$  immer noch senkrecht zu  $\hat{e}_3$ .
3. Schritt 1 und 2 zusammen haben also  $(e_1, e_3)$  nach  $(e'_1, \hat{e}_3)$  gedreht. Somit ist die "neue" z-Achse  $\hat{e}_3$  senkrecht zum körperfesten Vektor  $\hat{e}_1$  (Orthonormalbasis), aber auch senkrecht zum Zwischenvektor  $e'_1$ . Folglich liegen  $\hat{e}_1$  und  $e'_1$  in der Ebene, auf der  $\hat{e}_3$  senkrecht steht. Drehen wir also nun abschließend alles um einen Winkel  $\psi$  um die Achse entlang  $\hat{e}_3$ , dann können wir auch noch  $e'_1$  und  $\hat{e}_1$  zur Deckung bringen, ohne dabei  $\hat{e}_3$  zu verändern. Damit haben wir unser Ziel erreicht!

Dieses Schema verwendet die *Euler-Winkel*  $(\varphi, \vartheta, \psi)$ , um die raumfeste Basis des Beobachters in die körperfeste Basis zu rotieren. Unsere generalisierten Koordinaten sind deshalb diese drei Euler-Winkel.

## 9.7 Kinetische Energie mit Euler-Winkeln

Ändert sich die Orientierung der körperfesten Basis durch eine Rotation des Körpers, dann ändern sich auch die Euler-Winkel. Folglich ist der Vektor  $\omega$ , der die Rotation beschreibt, direkt mit der zeitlichen Änderung der Euler-Winkel verknüpft. Wir drücken nun die Koordinaten  $\hat{\omega}_i$  des Vektors  $\omega$  als Funktion der Euler-Winkel und deren Geschwindigkeiten aus.

Um das zu erreichen, entwickeln wir

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \hat{\omega}_i \hat{e}_i = \boldsymbol{\omega}_\varphi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\psi = \dot{\varphi} e_3 + \dot{\theta} e'_1 + \dot{\psi} \hat{e}_3, \quad (425)$$

als Summe dreier Rotationen um die drei Achsen der Euler-Rotation; jeder Euler-Winkel beschreibt ja eine Drehung um eine dieser Achsen, wodurch die Koordinaten von  $\boldsymbol{\omega}$  direkt die Geschwindigkeiten der Euler-Winkel sind. Diese Achsen sind: (i) die Achse entlang  $e_3$  ( $\boldsymbol{\omega}_\varphi$ ), (ii) die Achse entlang  $e'_1$  im 2. Schritt der Euler-Rotation ( $\boldsymbol{\omega}_\theta$ ), und (iii) die Achse  $\hat{e}_3$  des körperfesten Systems ( $\boldsymbol{\omega}_\psi$ ). Um nun die Koordinaten  $\hat{\omega}_i$  zu finden, ermitteln wir separat die Koordinaten der unabhängigen Rotationen  $\boldsymbol{\omega}_\varphi$ ,  $\boldsymbol{\omega}_\theta$  und  $\boldsymbol{\omega}_\psi$  in der körperfesten Basis und addieren diese.

Vorweg eine weitere kleine Überlegung. Wir stellen uns vor, wir haben einen Vektor  $\boldsymbol{\omega}$  und wollen diesen bezüglich zweier verschiedener Basen  $e_i$  und  $e'_i$  ausdrücken,

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i e_i = \sum_{i=1}^3 \omega'_i e'_i. \quad (426)$$

Angenommen wir kennen schon die Koordinaten  $\omega_i$  und wissen, dass sich die Basis  $e'_i = D e_i$  aus der Rotation  $D$  der Basis  $e_i$  ergibt, d.h.  $e'_i = D e_i$ . Wie lauten nun die Koordinaten  $\omega'_i$ ? Wir beobachten Folgendes:

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega'_i e'_i = \sum_{i=1}^3 \omega'_i D e_i = D \sum_{i=1}^3 \omega'_i e_i \iff D^{-1} \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega'_i e_i. \quad (427)$$

Die rechte Seite bedeutet: Um die Koordinaten  $\omega'_i$  in der rotierten Basis  $e'_i$  zu berechnen, können wir genauso gut den Vektor  $\boldsymbol{\omega}$  *aktiv* mit der *inversen* Rotation  $D^{-1}$  rotieren, um dann die Koordinaten des rotierten Vektors  $D^{-1} \boldsymbol{\omega}$  in der *alten* Basis  $e_i$  zu berechnen. Kennen wir also die Koordinatendarstellung  $D_{ij}$  von  $D$  in der Basis  $e_i$ , dann ist (Hinweis:  $[D^{-1}]_{ij} = D_{ji}$  wegen  $D^{-1} = D^T$ )

$$\omega'_i = \sum_{j=1}^3 D_{ji} \omega_j. \quad (428)$$

Wir müssen also nur den Vektor  $\boldsymbol{\omega}$  entsprechend in der Koordinatendarstellung der Basis  $e_i$  rotieren, um die Koordinaten in der neuen Basis zu erhalten. Davon werden wir jetzt reichlich Gebrauch machen!

Der Vektor  $\omega_\varphi$  entspricht einer Rotation um die  $z$ -Achse des Beobachters (entlang  $e_3$ ), also bezüglich der Basis  $e_i$  hat dieser die Koordinaten

$$\omega_\varphi = \dot{\varphi} e_3 =: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}. \quad (429)$$

Wir wollen aus diesen Koordinaten nun die Koordinaten in der körperfesten Basis ermitteln. Die Beobachter-Basis wird durch die drei Schritte der Euler-Rotation in die körperfeste Basis überführt. Jeder Schritt führt uns in eine weitere Basis, die sich durch Rotation der vorherigen Basis um genau eine Koordinaten-Achse unterscheidet. Jeder Schritt ergibt auch andere Koordinaten des Vektors  $\omega_\varphi$ . Um diese Serie von Koordinatentransformationen zu berechnen, wenden wir unseren Trick der inversen Rotation, siehe oben, mehrmals hintereinander an. Wir drehen in der Koordinatendarstellung (i) um die  $z$ -Achse (Winkel  $-\varphi$ ), (ii) um die  $x$ -Achse (Winkel  $-\vartheta$ ), und (iii) wieder um die  $z$ -Achse (Winkel  $-\psi$ ), d.h. (rechts nach links)

$$\begin{aligned} \omega_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \\ &:= \underline{D(\varphi, \vartheta, \psi)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin \psi \sin \vartheta \\ \dot{\varphi} \cos \psi \sin \vartheta \\ \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (430)$$

$$(431)$$

Das sind folglich die Koordinaten von  $\omega_\varphi$  im körperfesten Koordinatensystem. Die  $3 \times 3$ -Matrix  $D(\varphi, \vartheta, \psi)$  ist die Matrix, mit der wir jeden Vektor in raumfesten Koordinaten in körperfeste Koordinaten transformieren können.

Eine Drehung um den Winkel  $\vartheta$  entspricht im Koordinatensystem des 2. Schritts der Euler-Rotation einer Drehung um die  $x$ -Achse entlang  $e'_1$ . Wir starten also für  $\omega_\vartheta$  direkt bei Schritt 2 der Euler-Rotationen,

$$\omega_\vartheta = \dot{\vartheta} e'_1 =: \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (432)$$

Um nun diese Koordinaten im körperfesten System zu erhalten, müssen wir  $\omega_\vartheta$  nur noch um den Winkel  $-\varphi$  um die  $z$ -Achse entlang  $\hat{e}_3$  drehen, Schritt 3 der Euler-Rotation,

$$\omega_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\dot{\vartheta} \cos \psi \\ -\dot{\vartheta} \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (433)$$

Das ist die Koordinatendarstellung von  $\omega_\vartheta$  im körperfesten System.

Die dritte Rotationskomponente  $\omega_\psi$  ist eine Drehung um die  $z$ -Achse im körperfesten System, so dass diese einfach die folgenden Koordinaten im körperfesten System hat:

$$\omega_\psi = \dot{\psi} \hat{e}_3 =: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}. \quad (434)$$

Nehmen wir alle drei Komponenten von  $\omega$  zusammen, dann erhalten wir also eine Parametrisierung von  $\omega$  im körperfesten Koordinatensystem der Art:

$$\sum_{i=1}^3 \hat{\omega}_i \hat{e}_i =: \begin{pmatrix} \hat{\omega}_1 \\ \hat{\omega}_2 \\ \hat{\omega}_3 \end{pmatrix} = \omega_\varphi + \omega_\vartheta + \omega_\psi = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \\ \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi \\ \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi} \end{pmatrix}. \quad (435)$$

Hiermit wird die kinetische Energie des starren Körpers schließlich

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \hat{\omega}_i^2 \hat{I}_i \quad (436)$$

$$= \frac{\hat{I}_1}{2} (\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi)^2 + \frac{\hat{I}_2}{2} (\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi)^2 + \frac{\hat{I}_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2. \quad (437)$$

## 9.8 Schwerer Kreisel

Als Beispiel wollen wir einen schweren, symmetrischen Kreisel betrachten. ‘‘Symmetrisch’’ bedeutet, dass wir  $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$  annehmen; die Hauptträgheitsachse  $\hat{e}_3$  bezeichnet man als *Figurenachse*. ‘‘Schwer’’ bedeutet,



dass wir als Drehpunkt einen vom Masseschwerpunkt  $\mathbf{R}$  verschiedenen Punkt im Körper wählen. Außerdem wählen wir die Basis so, dass die  $z$ -Richtung  $e_3$  der raumfesten Basis des Beobachters gegen das homogene Erdschwerefeld zeigt.

Hierdurch vereinfacht sich Lagrange-Funktion des Kreisels zu (die  $\hat{I}_1$ - und  $\hat{I}_2$ -Terme in  $T$  werden zusammengefasst)

$$\mathcal{L} = \frac{\hat{I}_1}{2}(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{\hat{I}_3}{2}(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 - mgl \cos \vartheta . \quad (438)$$

Dieses System hat die drei Freiheitsgrade  $\varphi$ ,  $\vartheta$  und  $\psi$ , die die Lage des Kreisels beschreiben. Für  $\vartheta = 0$  zeigt die Figurenachse nach oben. Die konstante Länge  $l = |\mathbf{R}|$  bezeichnet den Abstand des Massenschwerpunkts vom Drehpunkt.

Wir sehen sofort, dass  $\psi$  und  $\varphi$  zyklisch sind. Also sind deren konjugierte Impulse Erhaltungsgrößen,

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \hat{I}_3(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) = \text{konst.} , \quad (439)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \hat{I}_1 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + \hat{I}_3 \cos \vartheta (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) = \hat{I}_1 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + p_\psi \cos \vartheta = \text{konst.} . \quad (440)$$

Dies formen wir nun etwas um nach

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{\hat{I}_1 \sin^2 \vartheta} =: \frac{p_\varphi - p_\psi u}{\hat{I}_1 (1 - u^2)} \quad (441)$$

und

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{\hat{I}_3} - \dot{\varphi} u = \frac{p_\psi}{\hat{I}_3} + \frac{p_\psi u^2 - p_\varphi u}{\hat{I}_1 (1 - u^2)} . \quad (442)$$

Wir haben hier  $u := \cos \vartheta$  ersetzt, weil uns aufgefallen ist, dass  $\vartheta$  nur als Funktion  $\cos \vartheta$  in den Impulsen vorkommt. Die letzten zwei Gleichungen können wir benutzen, um die Bahnen von  $\varphi$  und  $\psi$  zu berechnen,

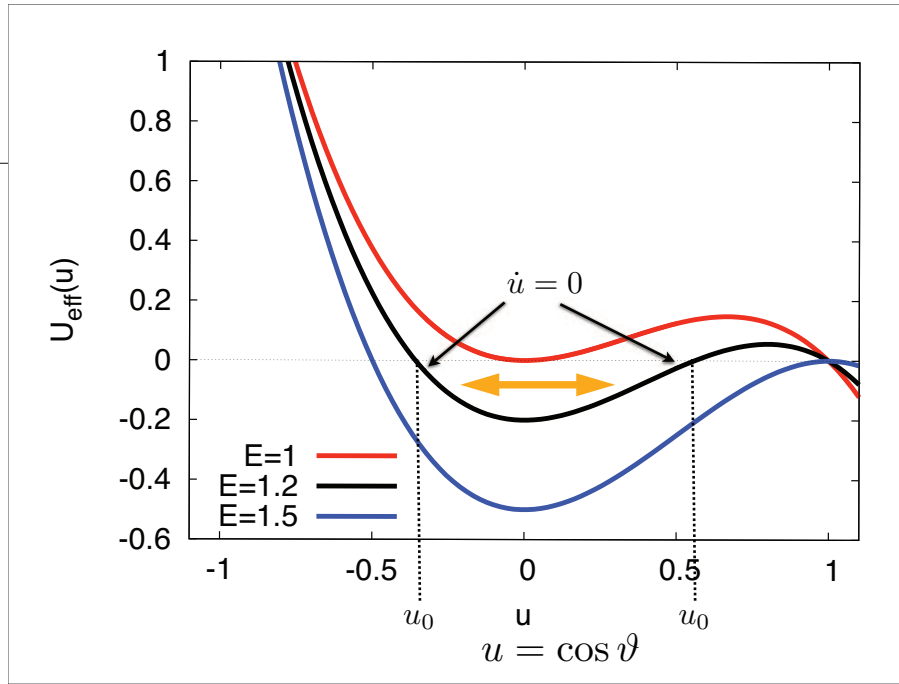
$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t dt' \dot{\varphi} = \int_{t_0}^t dt' \frac{p_\varphi - p_\psi u(t')}{\hat{I}_1 (1 - u(t')^2)} , \quad (443)$$

$$\psi(t) - \psi(t_0) = \int_{t_0}^t dt' \dot{\psi} = \int_{t_0}^t dt' \left( \frac{p_\psi}{\hat{I}_3} + \frac{p_\psi u(t')^2 - p_\varphi u(t')}{\hat{I}_1 (1 - u(t')^2)} \right) , \quad (444)$$

sobald wir die Bahn  $u(t)$  gefunden haben.

Die Gesamtenergie des Kreisels berechnen wir mit den erhaltenen Impulsen durch Einsetzen zu:

$$E = T + mgl u = \frac{\hat{I}_1}{2} \dot{\vartheta}^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi u)^2}{2\hat{I}_1 (1 - u^2)} + \frac{p_\psi^2}{2\hat{I}_3} + mgl u . \quad (445)$$



Wir bemerken hier

$$\dot{u}^2 = \left( \frac{d \cos \vartheta}{dt} \right)^2 = \dot{\vartheta}^2 \sin^2 \vartheta = \dot{\vartheta}^2 (1 - u^2) \iff \dot{\vartheta}^2 = \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2}, \quad (446)$$

so dass man die (erhaltene) Gesamtenergie als Funktion von  $u$  und  $\dot{u}$  schreiben kann,

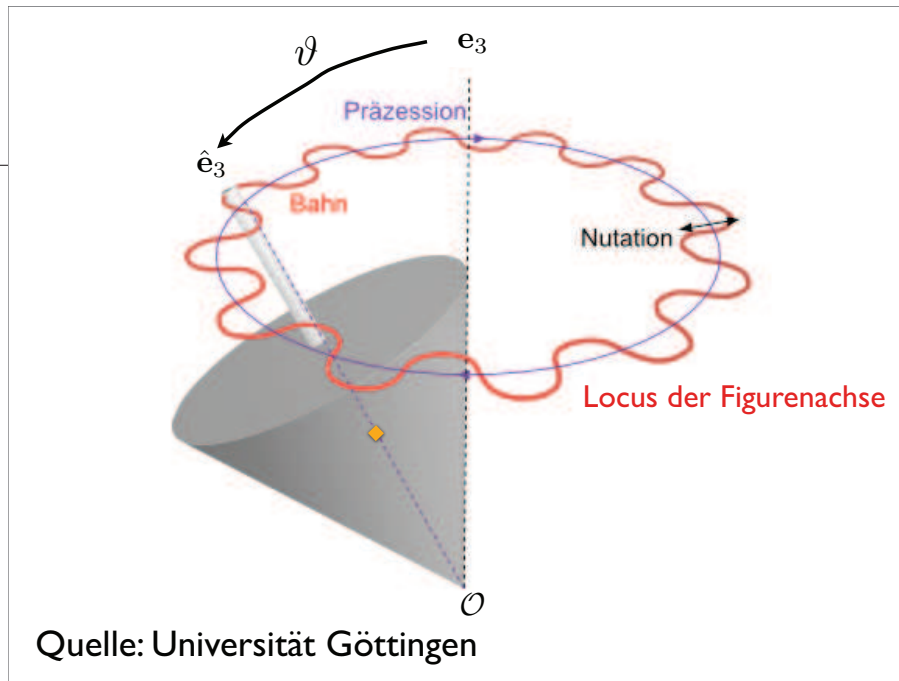
$$E = \frac{\hat{I}_1}{2} \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2} + \frac{(p_\varphi - p_\psi u)^2}{2\hat{I}_1(1 - u^2)} + \frac{p_\psi^2}{2\hat{I}_3} + mglu. \quad (447)$$

Dies erinnert uns sehr an das Einkörperproblem, insbesondere wenn wir diese Gleichung nochmals etwas umformen,

$$\frac{\hat{I}_1}{2} \dot{u}^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi u)^2}{2\hat{I}_1} + \frac{p_\psi^2(1 - u^2)}{2\hat{I}_3} + mglu(1 - u^2) - E(1 - u^2) =: \frac{\hat{I}_1}{2} \dot{u}^2 + \underline{U_{\text{eff}}(u)} = 0. \quad (448)$$

Formal ist die Bewegungsgleichung von  $u$  demnach wie die eines Punktteilchens mit Masse  $\hat{I}_1$  im effektiven Potenzial  $U_{\text{eff}}(u)$  (unterstrichen). Beachte aber, dass die “Gesamtenergie”  $\hat{I}_1 \dot{u}^2 / 2 + U_{\text{eff}}(u)$  dieses äquivalenten Einkörperproblems nur einen Wert, nämlich Null, hat. Hieraus erhalten wir ein Integral für die Umkehrfunktion von  $u(t)$ ,

$$t - t_0 = \pm \int_{u_0}^u \frac{du'}{\sqrt{-2U_{\text{eff}}(u')}}. \quad (449)$$



Die Bewegungsgleichungen des schweren Kreisel sind somit vollständig integrabel (aber i.A. nicht analytisch lösbar).

Wie beim Einkörperproblem definieren (benachbarte) Punkte  $u_0$  mit  $U_{\text{eff}}(u_0) = 0$  Umkehrpunkte, bei denen  $\dot{u}$  das Vorzeichen ändern muss;  $u$  wird also zwischen den Umkehrpunkten periodisch hin und her oszillieren ( $\pm$  bestimmt die Laufrichtung von  $u$ ). Die Neigung des Kreisel bzw. die der Figurenachse  $\hat{e}_3$  wird deshalb periodisch schwanken ( $\vartheta$  ist der Winkel zwischen  $e_3$  und  $\hat{e}_3$ ). Diese Schwankung nennt man *Nutation* des Kreisel. Die Amplitude der Nutation wird durch den Winkelabstand der Umkehrpunkte  $u_0 = \cos \vartheta_0$  bestimmt;  $\omega_\vartheta$  ändert den Nutationswinkel. Gleichzeitig wird die Figurenachse eine Kreisbewegung um  $e_3$  beschreiben, die man als *Präzession* bezeichnet. Diese Rotation ist mit  $\omega_\varphi$  und damit  $p_\varphi$  verknüpft. Die Rotation  $\omega_\psi$  ist eine Bewegung um die Figurenachse  $\hat{e}_3$ , so dass  $p_\psi$  mit der Rotation des Kreisel um die eigene Symmetrieachse verknüpft ist. Die Überlagerung von Präzessions- und Nutationsbewegung lässt die Symmetrieachse u.U. komplexe Bewegungsmuster beschreiben, die hier aber nicht näher diskutiert werden sollen (siehe z.B. [3]).

## 9.9 Freie starre Körper

Die vorangegangene Diskussion der starren Körper ist davon ausgegangen, dass der Körper im Drehpunkt festgehalten wird; der Schwerpunkt kann sich dann nur mit  $|\mathbf{R}| = \text{konst}$  bewegen. Dadurch sind die drei Euler-Winkel die einzigen Freiheitsgrade des Problems.

Im allgemeineren Fall jedoch wird sich der Schwerpunkt  $\mathbf{R}$  des starren Körpers frei bewegen können, so dass dieser nicht automatisch von den Euler-Winkel abhängt. In diesem Moment erhalten wir drei weitere Freiheitsgrade, die die Translation des Schwerpunktes beschreiben. Das Problem des freien starren Körpers hat also insgesamt sechs Freiheitsgrade: drei Koordinaten der Rotation (Euler-Winkel) und drei Koordinaten der Translation (Position von  $\mathbf{R}$ ). Ein frei beweglicher starrer Körper wird um den Schwerpunkt  $\mathbf{R}$  rotieren. In diesem Fall ist Lagrange-Funktion eine Summe der Translationsenergie des Schwerpunktes und der Rotationsenergie um den Schwerpunkt, d.h.

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2} |\dot{\mathbf{R}}|^2 + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}' \boldsymbol{\omega} \rangle - U(\mathbf{R}, \varphi, \vartheta, \psi), \quad (450)$$

wobei die Rotationsenergie  $T_{\text{rot}} = \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}' \boldsymbol{\omega} \rangle / 2$  wie oben in der körperfesten Basis als Funktion der Euler-Winkel ausgedrückt wird. Der Trägheitstensor ist der relativ zum Schwerpunkt. Wir können das auch so sehen: Für jeden Körper, der nicht als Punktmasse approximiert werden kann, aber zumindest starr ist, addieren wir einen zusätzlichen Term  $T_{\text{rot}}$  zur Lagrange-Funktion, um die inneren Freiheitsgrade der Orientierung zu berücksichtigen; als einzige Zusatzinformation über die Massenverteilung im Körper werden die Hauptträgheitsmomente  $\hat{I}_i$  benötigt.

Im Falle eines *inhomogenen Kraftfelds* können der Schwerpunkt und das Massenzentrum  $\mathbf{R}$  verschieden sein, siehe Abschnitt 9.3; die potenzielle Energie  $U$  vermischt dann die Translationskoordinaten von  $\mathbf{R}$  und die Euler-Winkel der Orientierung des Körpers. Dann kann auch auf einen freien Körper ein Drehmoment  $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}}$  relativ zum Drehpunkt  $\mathbf{R}$  wirken. Hierdurch kann auch dieser, trotz einer freien Bewegung, eine Präzession und Nutation vollführen! Dies ist z.B. bei der Erde der Fall, die in 1. Näherung als freier starrer Körper betrachtet werden kann. Durch das inhomogene Gezeitenfeld des Mondes und der Sonne beschreibt die Erde eine Präzessions- und eine (kleine) Nutationsbewegung. Die Präzession bewegt die Erdfigurenachse etwa um  $1.4^\circ$  pro Jahrhundert, wodurch zum selben Tag des Jahres z.B. die



Quelle: Bild, Axel-Springer Verlag, Dez. 2010

Sonne vor etwa 2000 Jahren eine  $\sim 28^\circ$  andere Position zum Fixsternhimmel hatte als heute. Der griechische Naturphilosoph Hipparchos (\*190 v.Ch.-† 120 v.Ch.) schätzte diesen Effekt schon vor  $\sim 2200$  Jahren aufgrund von Beobachtungen auf ca.  $1^\circ$  pro Jahrhundert.

Sollte der starre Körper zwar eine Translationsbewegung ausführen können, aber rotiert dieser dabei nicht um den Schwerpunkt sondern um einen anderen Drehpunkt (z.B. rollender Zylinder mit Umwucht), dann drückt man  $\mathcal{L}$  als Funktion der Position des Drehpunktes  $\mathbf{D} = \mathbf{R} + \mathbf{d}$  aus;  $\mathbf{d}$  ist der Abstandsvektor des Drehpunkts vom Schwerpunkt. In diesem allgemeineren Fall wird die Lagrange-Funktion durch Substitution der obigen mit  $\mathbf{R} = \mathbf{D} - \mathbf{d}$  zu:

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2} |\dot{\mathbf{D}}|^2 - \underline{M \langle \dot{\mathbf{D}}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d} \rangle} + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \rangle - U(\mathbf{D} - \mathbf{d}, \varphi, \vartheta, \psi), \quad (451)$$

wobei  $\mathbf{I}$  hier das Trägheitsmoment um den Drehpunkt ist; der unterstrichene Term ist ein Mischterm zwischen Translation  $\dot{\mathbf{D}}$  und der Rotation  $\dot{\mathbf{d}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}$ ;  $\mathbf{d}$  hängt von der Orientierung ab. Ist das Kraftfeld praktisch homogen über die Ausdehnung des Körpers, dann ist  $U(\mathbf{D} - \mathbf{d}, \dots) \approx U(\mathbf{D})$ .

## 10 Hamilton-Mechanik

Im Abschnitt 7.7 haben wir eine neue Funktion gefunden, die sich aus der Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}$  des Systems berechnen läßt, die

**Hamiltonfunktion.**

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N_k} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t). \quad (452)$$

Wie wir diskutiert haben, ist diese Funktion für  $\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$  eine Erhaltungsgröße entlang einer Trajektorie  $q(t)$ , und sie ist unter bestimmten Bedingungen mit der Gesamtenergie  $E = T + U$  eines Systems identisch (konservative Kräfte und Ruhekoordinaten). Die Hamilton-Funktion hat aber auch noch andere Eigenschaften, mit denen sich eine alternative Beschreibung der Mechanik ableiten läßt: die Hamilton-Mechanik.

### 10.1 Kanonische Gleichungen

Sieht man sich die rechte Seite von Gl. (452), könnte man zuerst meinen, dass  $\mathcal{H}$  eine Funktion der generalisierten Koordinaten  $q_i$ , deren Zeitableitungen  $\dot{q}_i$ , der Zeit  $t$  und der konjugierten Impulse  $p_i$  ist.

Tatsächlich sind aber nur  $q_i$  und  $p_i$  unabhängige Variablen von  $\mathcal{H}$ . Dies erkennt man dann, wenn man sich die infinitesimale Änderung von  $\mathcal{H}$  als Funktion der Änderungen aller Argumente der Hamilton-Funktion ansieht, nämlich das totale Differential (Kettenregel; denke an  $d\mathcal{H}/dt \cdot dt$ )

$$d\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N_k} d(p_i \dot{q}_i) - d\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \quad (453)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_k} (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \sum_{i=1}^{N_k} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (454)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_k} (\dot{q}_i dp_i + \underline{p_i d\dot{q}_i}) - \sum_{i=1}^{N_k} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \underline{p_i d\dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (455)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_k} \left( \dot{q}_i dp_i - \underline{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (456)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_k} (\dot{q}_i dp_i - \underline{\dot{p}_i} dq_i) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (457)$$

In der letzten Zeile haben wir die ELG2 verwendet, um  $\dot{p}_i$  einzusetzen (unterstrichen). Diese unterste Zeile zeigt uns, dass die Differentiale  $dq_i$ ,  $d\dot{q}_i$  und  $dp_i$  teilweise voneinander abhängig sind, und die gesamte Änderung  $d\mathcal{H}$  auf drei Familien  $(q_i, p_i, t)$  von unabhängigen Variablen zurückgeführt werden kann. Oder:  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  kann allgemein als Funktion der Koordinaten  $\mathbf{q}$ , der Impulse  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{N_k})$  und der Zeit  $t$  geschrieben werden.

Deshalb gilt auch (Kettenregel) gleichzeitig für das Differential:

$$d\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^{N_k} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt . \quad (458)$$

Weil die Variablen  $(q_i, p_i, t)$  unabhängig sind, und Gl. (457) und (458) äquivalente Ausdrücke für  $d\mathcal{H}$  sind, müssen die Koeffizienten vor den Differentialen unabhängiger Variablen wie z.B.  $dq_i$  gleich sein, d.h.

$$\underline{\dot{q}_i = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} ; \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} ; \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} .} \quad (459)$$

Insbesondere die unterstrichenen  $2N_k$  Relationen links sind von großer Bedeutung, weil sie Bewegungsgleichungen der konjugierten Koordinaten  $(q_i, p_i)$  beschreiben. Man nennt diese die

### Kanonische Gleichungen.

$$\dot{q}_i = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} ; \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad \forall i = 1 \dots N_k \quad (460)$$

der Hamilton-Mechanik. Aus diesen Gleichungen kann man die Bewegung der Orte  $q_i$  und der Impulse  $p_i$  aus der Hamilton-Funktion “ableiten”. Wir kommen darauf gleich im Detail zu sprechen, bemerken aber schon hier, dass diese Bewegungsgleichungen mathematisch einfacher sind als die ELG2: Statt zweier partieller Ableitungen und einer totalen Zeitableitung in der Euler-Lagrange-Mechanik für die Bewegung von  $q_i$  benötigt der neue Satz Variablen  $q_i$  und  $p_i$  nur zwei partielle Ableitungen, jeweils eine für die Orte und eine für die Impulse. Zusätzlich haben wir nun nur Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Zeit statt Differentialgleichungen 2. Ordnung. Jedoch ist die Anzahl der Variablen von  $N_k$  Orten  $q_i$  in der Euler-Lagrange-Mechanik nun auf  $2N_k$  Variablen  $q_i$  und  $p_i$  gestiegen. Letzteres ist nicht überraschend, weil eine Differentialgleichung 2. Ordnung mit  $N_k$  Variablen formal äquivalent ist mit  $2N_k$  Differentialgleichungen 1. Ordnung.

**Rotierender Draht** Als Beispiel einer Hamilton-Funktion betrachten wir ein Teilchen auf einem gleichförmig rotierenden Draht ( $\omega$ : Winkelgeschwindigkeit der Rotation). Der Abstand vom Rotationszentrum sei  $x$ , und es wirke eine Kraft mit Potenzial  $U(x)$  auf das Teilchen,

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = T(x, \dot{x}) - U(x) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + x^2\omega^2) - U(x). \quad (461)$$

Der zu  $x$  konjugierte Impuls ist  $p = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x} = m\dot{x}$ . Also ist die Hamilton-Funktion

$$\mathcal{H}(p, x) = \dot{x}p - \mathcal{L} = \dot{x}p - \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}x^2\omega^2 + U(x) \stackrel{(*)}{=} \frac{p^2}{m} - \frac{m}{2}\frac{p^2}{m^2} - \frac{m}{2}x^2\omega^2 + U(x) = \frac{p^2}{2m} - \frac{m}{2}x^2\omega^2 + U(x). \quad (462)$$

Wir dürfen hier nicht vergessen, dass nach (\*) erst mal alle Geschwindigkeiten, hier nur  $\dot{x}$ , durch Impulse und Orte ersetzt werden müssen. Diese Relationen folgen aus den Relationen der konjugierten Impulse. Die kanonischen Gleichungen von  $(x, p)$  lauten schließlich

$$\dot{x} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}; \quad \dot{p} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} = m\omega^2 x - \frac{\partial U(x)}{\partial x}. \quad (463)$$

Im Übrigen ist  $\mathcal{H}$  in diesem Fall, abgesehen von  $\omega = 0$ , *nicht* mit der Gesamtenergie identisch,

$$E = T + U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}x^2\omega^2 + U(x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}x^2\omega^2 + U(x) \neq \mathcal{H}(x, p). \quad (464)$$

Dass dem nicht so ist, liegt daran, dass die Zwangsbedingung der Rotation rheonom ist; der erzwungene Phasenwinkel des Teilchens ist fest vorgegeben und zeitabhängig; wir benutzen keine Ruhekoordinaten. Dennoch muss  $\mathcal{H}$  eine Erhaltungsgröße sein, da  $\mathcal{L}$  nicht explizit zeitabhängig ist. Letzteres ändert sich jedoch, wenn wir die Rotationsgeschwindigkeit des Drahtes mit der Zeit ändern.

**Anmerkung** Die Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}$  und die Hamilton-Funktion  $\mathcal{H}$  sind so-genannte Legendre-Transformierte von einander bezüglich der Variablen  $\dot{q}_i$ .

Damit ist gemeint: Ist  $f(a, b)$  eine Funktion der unabhängigen Variablen  $a$  und  $b$ , dann bezeichnet man die neue Funktion  $g(c, b) := ca - f(a, b)$  mit den unabhängigen Variablen  $b$  und  $c := \frac{\partial f}{\partial a}$  als Legendre-Transformierte von  $f$  bezüglich  $a$ ; das Paar  $(a, c)$  bezeichnet man als Paar konjugierter Variablen. Die *Legendre-Transformation* von  $g(c, b)$  bezüglich  $c$  ergibt wieder  $f(a, b)$ .



Dass  $g$  eindeutig eine Funktion der Variablen  $c$  und  $b$  ist, sieht man anhand des Differentials

$$dg(c, b) = d(ac) - df(a, b) = cda + adc - \frac{\partial f(a, b)}{\partial a} da - \frac{\partial f(a, b)}{\partial b} db \quad (465)$$

$$= cda + adc - cda - \frac{\partial f(a, b)}{\partial b} db \quad (466)$$

$$= a dc - \frac{\partial f(a, b)}{\partial b} db = \frac{\partial g}{\partial c} dc + \frac{\partial g}{\partial b} db . \quad (467)$$

Die letzte Zeile zeigt uns außerdem, dass wir den Wert  $a = \partial g / \partial c$  mit dem neuen Potenzial  $g$  nicht verloren haben, sondern immer noch “ableiten” können.

Legendre-Transformationen spielen in den Bereichen der theoretischen Physik eine Rolle, in denen man physikalische Größen durch Ableitung einer Potenzialfunktion erhalten kann. Z.B. sind in der Mechanik die konjugierten Impulse  $p_i$  Ableitungen des Potentials  $\mathcal{L}$  nach  $\dot{q}_i$ . Oder eine konservative Kraft ist die Ableitung des Kraftpotentials nach einer Richtung; Kraft und Richtung sind konjugierte Größen. Besonders beliebt sind Legendre-Transformationen in der Thermodynamik, wo man die innere Energie  $U(S, V)$  ( $S$ : Entropie,  $V$ : Volumen) Legendre-transformiert, um neue Potentiale wie die Enthalpie  $H = U + pV$  oder die freie Energie  $F = U - TS$  zu erhalten. Legendre-Transformationen sind hier u.A. praktisch, weil die neuen thermodynamischen Potentiale, wie  $H$  und  $F$ , unter unterschiedlichen Randbedingungen Konstanten des Systems sind ( $dH = 0$ , wenn die Temperatur  $T$  und der Druck  $p$  konstant gehalten werden).

Die Legendre-Transformation ist ein Kunstgriff, um in einer mathematischen Beschreibung mit Potentials eine Variable durch ihre konjugierte Variable zu ersetzen, mit der wir dann stattdessen arbeiten. Genau dieser Kunstgriff wird in der Hamilton-Mechanik getan: Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  werden durch ihre konjugierten Impulse  $p_i$  ersetzt. Das neue Potenzial ist die Hamilton-Funktion  $\mathcal{H}$  anstatt der Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}$ . Nun sind die zu  $p_i$  konjugierten Größen die Variablen  $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$ . Die gesamte Beschreibung der Dynamik erfolgt nun mit  $q_i$  und  $p_i$  anstatt mit  $q_i$  und  $\dot{q}_i$  wie in der Euler-Lagrange-Mechanik.

## 10.2 Bewegung im Phasenraum

Wieso sollten wir die Bewegungsgleichungen anstatt mit den Koordinaten und Geschwindigkeiten  $(q_i, \dot{q}_i)$ , wie in der Lagrange-Euler-Mechanik, nun in den Koordinaten  $(q_i, p_i)$  der Hamilton-Mechanik beschrei-

ben? Der Grund ist eine symmetrischerer Formalismus. Dies ist vom theoretischen Standpunkt her ansprechender.

Um diese Symmetrie zu erkennen, sehen wir uns zuerst nochmal die Bewegungsgleichung von  $q_i$  in der Lagrange-Mechanik an (2. Art; Kräfte sind aus Potenzialen ableitbar):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i = 1 \dots N_k . \quad (468)$$

Dies ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung, weil diese Gleichungen i.A.  $\ddot{q}_i$  enthalten. Formal wird das eine Differentialgleichung 1. Ordnung, wenn wir die Orte  $q_i$  und die Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  als Paar unabhängiger Variablen zusammenfassen:

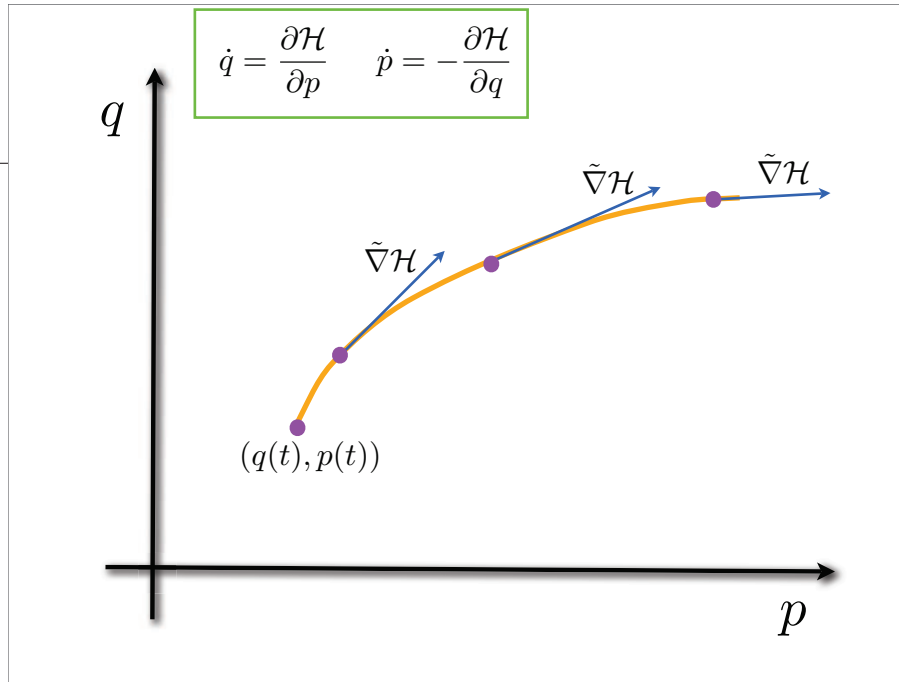
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_i(t) \\ \dot{q}_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}_i(t) \\ \ddot{q}_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}_i(t) \\ a_i(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \end{pmatrix} \quad \forall i = 1 \dots N_k , \quad (469)$$

wobei die Beschleunigung  $a_i := \ddot{q}_i$  implizit durch die Gl. (468) gegeben ist. Eindeutig lösbar wird dieses System von Gleichung durch Festlegung der Anfangsbedingungen  $\{\mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0)\}$ , d.h. jeder Punkt im  $2N_k$ -dimensionalen Orts-Geschwindigkeits-Raum legt die Bahn  $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$  durch den Raum eindeutig fest. Mathematisch ist diese Beschreibung unausgewogen, weil sich die Änderung des Ortes  $dq_i/dt$  auf dieser Bahn einfach direkt aus der Geschwindigkeitsvariable  $\dot{q}_i$  ergibt, wohingegen die Änderung der Geschwindigkeit  $d\dot{q}_i/dt = a_i$  u.U. eine komplizierte Funktion von  $\mathbf{q}$  und  $\dot{\mathbf{q}}$  (und der Zeit  $t$ ) sein kann.

In der Hamilton-Mechanik führen wir statt der Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  die Impulse  $p_i$  als unabhängige Variablen ein. In dieser Behandlung werden die Bewegungsgleichungen der Variablen gleichberechtigt. Hier wird der Zustand des Systems durch die  $N_k$  Orte  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{N_k})$  und die  $N_k$  Impulse  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{N_k})$  eindeutig definiert. Wir nennen den Raum aller  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{N_k} \otimes \mathbb{R}^{N_k}$  den *Phasenraum*. Jedes paar konjugierter Variablen des Phasenraums folgt nun der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_i(t) \\ p_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}_i(t) \\ \dot{p}_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{pmatrix} \quad \forall i . \quad (470)$$

Wir erkennen hier die Symmetrie der Gleichung zwischen  $q_i$  und  $p_i$ , deren Zeitableitungen explizit als einmalige partielle Ableitung der Hamilton-Funktion gegeben sind.



Wir können das noch kompakter schreiben, indem wir die zwei Phasenraum-Gradienten

$$\nabla_q = \left( \frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_{N_k}} \right) ; \quad \nabla_p = \left( \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_{N_k}} \right) \quad (471)$$

in Orts- und Impulsrichtung verwenden:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\nabla_p \mathcal{H} \\ -\nabla_q \mathcal{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_q \mathcal{H} \\ \nabla_p \mathcal{H} \end{pmatrix}. \quad (472)$$

Die Bewegungsgleichungen jedes holonomen Systems kann auf diese formal einfache, *symmetrische* Form gebracht werden. Die unterstrichene Matrix ist eine so-geannte symplektische Matrix mit  $M_{ij} = -M_{ji}$ .

Wir interpretieren das so: Der Zustand des Systems ist eindeutig ein Punkt im Phasenraum. Die Zeitentwicklung des Zustandes wird überall durch die Funktion  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  diktiert, die auf dem gesamten Phasenraum aller möglichen Zustände definiert ist. Im Zeitintervall  $dt$  fließt der Zustand entlang des *symplektischen Gradienten*  $\tilde{\nabla} \mathcal{H} := (+\nabla_p \mathcal{H}, -\nabla_q \mathcal{H})$  mit  $(d\mathbf{q}, d\mathbf{p}) = \tilde{\nabla} \mathcal{H} dt$ ;  $\tilde{\nabla} \mathcal{H}$  ist deshalb der Tangentialvektor an der Lösungskurve  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ . Das gesamte Vektorfeld aller symplektischen Gradienten  $\tilde{\nabla} \mathcal{H}$  aller Punkte des Phasenraums beschreibt deshalb die Tangentialvektoren aller möglichen Phasenraum-Trajektorien.

Verschwindet dieser Gradient für einen Punkt im Phasenraum,  $\nabla_q \mathcal{H} = \nabla_p \mathcal{H} = 0$ , dann kann sich der Zustand nicht mehr weiterentwickeln. Dies sind sogenannte *stationäre Punkte* des Systems. Desweiteren bewegt sich jeder Zustand eindeutig in genau eine Richtung weiter, wenn er kein stationärer Punkt ist. Dies bedeutet, unterschiedliche Bahnen können sich im Phasenraum niemals kreuzen oder berühren.

Ist  $\mathcal{H}$  eine Erhaltungsgröße,  $\mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \mathcal{H}_0 = \text{konst.}$ , dann kann sich eine Phasenraum-Trajektorie außerdem nur auf der  $2N_k - 1$  dimensionalen Hyperebene bewegen, die durch den Wert  $\mathcal{H}_0$  gegeben ist. Im obigen Beispiel des Einkörperproblems entspricht dies der eindimensionalen Kurve

$$p(x) = \pm \sqrt{2m} \sqrt{\mathcal{H}_0 + U(x) - \frac{m}{2} x^2 \omega^2}. \quad (473)$$

Stationäre Punkte dieses Problems sind offensichtlich solche mit  $p = 0$  und  $\partial U(x)/\partial x = m\omega^2 x^2$ .

**Anmerkung** Die Kanonischen Gleichungen lassen sich auch aus dem Hamilton-Prinzip ableiten, wenn man stationäre Lösungen  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  der Wirkung

$$S[\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \sum_{i=1}^{N_k} \dot{q}_i(t) p_i(t) - \mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) \right) \quad (474)$$

sucht und hierfür die  $2N_k$  Variablen  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  variiert.

Bei den ELG2 wurden nur die  $N_k$  Variablen  $q_i(t)$  variiert; die Variation der Geschwindigkeit  $\dot{q}_i(t)$  ist hierdurch automatisch gegeben, da  $\delta \dot{q}_i = \dot{\delta q}_i$ ; in der Hamilton-Mechanik werden  $\mathbf{q}(t)$  und  $\mathbf{p}(t)$  unabhängig variiert. Als Randbedingung muss in der Hamilton-Mechanik  $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$  fixiert sein. Die Variationen von  $\delta p_i(t_0)$  und  $\delta p_i(t_1)$  hingegen können sowohl fixiert werden oder frei gelassen werden. Beides führt zu den gleichen Bewegungsgleichungen. Details finden man z.B. in (**author?**) [3].

Unter symplektischen linearen Abbildungen  $M$  versteht man solche mit  $M^\dagger = -M$ , wobei  $M^\dagger$  die Adjungierte zu  $M$  mit  $\langle \mathbf{x}, M\mathbf{y} \rangle = \langle M^\dagger \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  ist. In Koordinatendarstellung  $M_{ij}$  und mit einem reellen Zahlenkörper des metrischen Vektorraums  $V$  bedeutet dies  $M_{ji} = -M_{ij}$  bei einer *Orthonormalbasis*: die transponierte Matrix entspricht der gespiegelten Matrix.

### 10.3 Hamilton-Algebra

Im praktischen Umgang mit der Hamilton-Mechanik hat sich die

**Poisson-Klammer.**

$$[f, g] := \sum_{i=1}^{N_k} \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (475)$$

als algebraische Operation im Phasenraum als besonders nützlich erwiesen. Um diese zu motivieren, sehen wir uns die Zeitentwicklung einer beliebigen Funktion  $\mathcal{G}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  im Phasenraum entlang der Trajektorie  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  an (Kettenregel):

$$\frac{d\mathcal{G}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t)}{dt} = \sum_{i=1}^{N_k} \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \quad (476)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_k} \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \quad (477)$$

$$=: [\mathcal{G}, \mathcal{H}] + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}, \quad (478)$$

Offensichtlich ist die Zeitentwicklung einer Funktion  $\mathcal{G}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  durch  $\dot{\mathcal{G}} = [\mathcal{G}, \mathcal{H}] + \partial \mathcal{G} / \partial t$  mit der Hamilton-Funktion verbunden. Ist  $\mathcal{G}$  nicht explizit zeitabhängig, dann wird dies durch die Poisson-Klammer der besonders einfache Ausdruck  $\dot{\mathcal{G}} = [\mathcal{G}, \mathcal{H}]$ .

Hieraus erhalten wir sofort, dass

$$\dot{\mathcal{H}} = [\mathcal{H}, \mathcal{H}] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}; \quad (479)$$

die Zeitentwicklung von  $\mathcal{H}$  ist also konstant entlang einer Phasenraumtrajektorie, wenn  $\mathcal{H}$  nicht explizit von der Zeit abhängt,  $\partial \mathcal{H} / \partial t = -\partial \mathcal{L} / \partial t = 0$ . Damit ist  $\mathcal{H}$  in diesem Fall eine Erhaltungsgröße, wie wir schon besprochen hatten. Die Rechnung hierfür ist in der Hamilton-Beschreibung aber extrem kurz!

Was sind die Zeitableitungen der konjugierten Variablen  $q_i$  und  $p_i$ ? Diese sind triviale Sonderfälle der obigen Regel mit wahlweise  $\mathcal{G} = q_i$  oder  $\mathcal{G} = p_i$ . Wir erhalten so eine alternative Notation der Kanonischen Gleichungen, nämlich:

$$\dot{q}_i(t) = [q_i, \mathcal{H}] \quad ; \quad \dot{p}_i(t) = [p_i, \mathcal{H}] \quad (480)$$

Außerdem findet man für eine Poisson-Klammer einer Variablen  $q_i$  oder  $p_i$  mit einer beliebigen Funktion  $\mathcal{G}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  durch Einsetzen

$$[q_i, \mathcal{G}] = + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} \quad ; \quad [p_i, \mathcal{G}] = - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}. \quad (481)$$

Poisson-Klammern mit  $q_i$  oder  $p_i$  entsprechen also den Gradienten entlang  $p_i$  oder  $-q_i$  (symplektischen Gradienten). Insbesondere erhalten wir hiermit als Sonderfall mit  $\mathcal{G} = p_j$  oder  $\mathcal{G} = q_j$  die

**Fundamentalen Poisson-Klammern.**

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad ; \quad [q_i, p_j] = -[p_i, q_j] = \delta_{ij}^K. \quad (482)$$

Zusätzlich erfüllt die Poisson-Klammer noch die Rechenregeln

- Linearität, d.h.  $[f, c_1g + c_2h] = c_1 [f, g] + c_2 [f, h]$  für  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ;
- Neutralität, d.h.  $[c, f] = 0$  für  $c \in \mathbb{R}$ ;
- Antisymmetrie, d.h.  $[f, g] = -[g, f]$ ;
- eine Produktregel, d.h.  $[fg, h] = f [g, h] + g [f, h]$ ;
- die Jacobi-Identität, d.h.  $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$ ;

Aus der Jacobi-Identität folgt das

**Jacobi-Poisson-Theorem.** Sind die Funktionen  $I_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  und  $I_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  Erhaltungsgrößen, d.h.

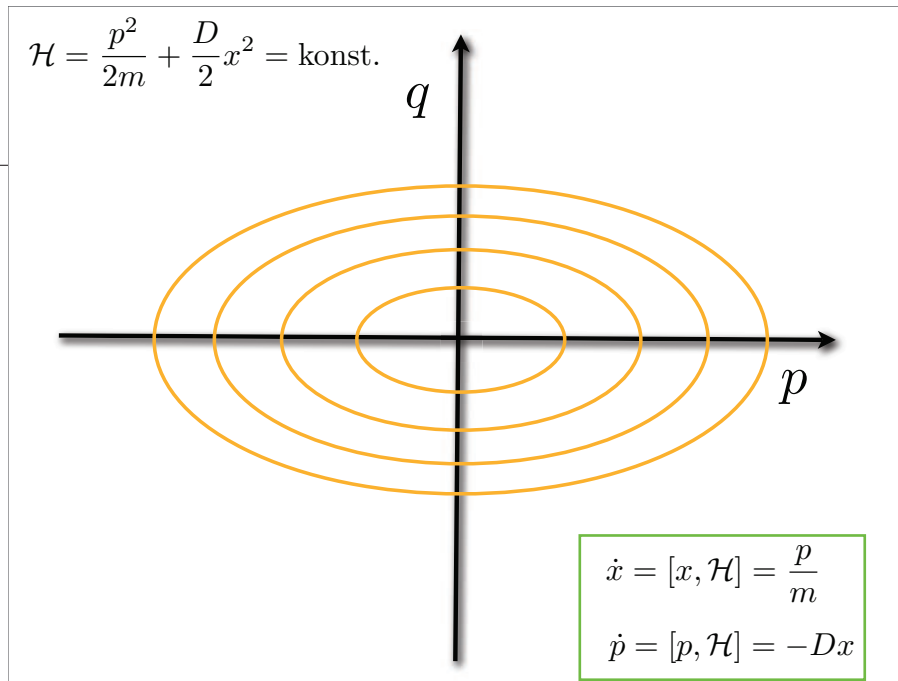
$$[I_1, \mathcal{H}] + \frac{\partial I_1}{\partial t} = [I_2, \mathcal{H}] + \frac{\partial I_2}{\partial t} = 0, \quad (483)$$

dann ist

$$I_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) := [I_1, I_2] \quad ; \quad [I_3, \mathcal{H}] + \frac{\partial I_3}{\partial t} = 0 \quad (484)$$

auch eine Erhaltungsgröße.

Dies folgt aus der Jacobi-Identität mit  $f = I_1$ ,  $g = I_2$  und  $h = \mathcal{H}$ . Dieses Theorem kann man verwenden, um basierend auf bekannten Erhaltungsgrößen neue Erhaltungsgrößen zu suchen.



**Harmonischer Oszillator** Diese Rechenregeln der Poisson-Klammer erlauben es, Bewegungsgleichungen im Phasenraum algebraisch zu bestimmen. Dies können wir anhand des eindimensional harmonischen Oszillators demonstrieren, für den

$$\mathcal{H}(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{D}{2}x^2 \quad (485)$$

gilt;  $D$  ist die Konstante der Rückstellkraft. Der Wert der Hamilton-Funktion ist in diesem Beispiel erhalten und mit der Gesamtenergie  $E = \mathcal{H}$  identisch. Hieran sieht man dann, dass die Bahnen des Oszillators im Phasenraum Ellipsen sein müssen, deren Größe von der Energie  $E$  abhängt und deren Halbachsen von der Masse  $m$  und der Federkonstanten  $D$  bestimmt werden. Die Bewegungsgleichungen des Oszillators sind nun

$$\dot{x} = [x, \mathcal{H}] = \left[ x, \frac{p^2}{2m} \right] + \left[ x, \frac{D}{2}x^2 \right] = \frac{1}{2m} \frac{\partial p^2}{\partial p} = \frac{p}{m}; \quad (486)$$

$$\dot{p} = [p, \mathcal{H}] = \left[ p, \frac{p^2}{2m} \right] + \left[ p, \frac{D}{2}x^2 \right] = \frac{D}{2} [p, x^2] = -\frac{D}{2} \frac{\partial x^2}{\partial x} = -Dx. \quad (487)$$

Hieraus ergibt sich wegen  $p = m\dot{x}$  sofort die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + Dx = 0 \quad (488)$$

des harmonischen Oszillators.

## 10.4 Kanonische Transformationen\*

Wir haben schon gelernt, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen forminvariant sind gegenüber einer Punkttransformation der generalisierten Koordinaten  $q_i$ . Nach einer Transformation

$$\mathcal{L}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, t), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t), t) \quad (489)$$

sind deshalb die Bewegungsgleichungen von  $Q_i$  immer noch

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial Q_i} = \dot{P}_i - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial Q_i} = 0 ; \quad P_i := \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_i} . \quad (490)$$

(Hier sind alle generalisierten Kräfte als Potenzial darstellbar.) Weil weiter oben die Hamilton-Funktion für beliebige Koordinaten hergeleitet wurde, müssen aber auch die Kanonischen Gleichungen bei einer Punkttransformation forminvariant sein, d.h.

$$\dot{Q}_i = [Q_i, \mathcal{H}'] ; \quad \dot{P}_i = [P_i, \mathcal{H}'] \quad (491)$$

bei

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \mapsto \mathcal{H}'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{N_k} P_i \dot{Q}_i - \mathcal{L}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) . \quad (492)$$

Wir erwarten deshalb beim Koordinatenwechsel im *Konfigurationsraum* der  $\mathbf{q}$  keine Schwierigkeiten beim Verwenden des Hamilton-Formalismus.

In der Hamilton-Mechanik sind  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{p}$  gleichberechtigte,  $2N_k$  unabhängige Variablen. Wir fragen uns nun, ob wir nicht hier Koordinatentransformationen allgemeiner als  $\mathbf{q}(\mathbf{Q}, t)$  finden können, die sowohl neue Ortskoordinaten  $\mathbf{Q}$  als auch neue konjugierte Impulse  $\mathbf{P}$  mischen, ohne die Kanonischen Gleichungen zu verändern, also wann mit

$$q_i = q_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) ; \quad p_i = p_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \quad (493)$$

und

$$\mathcal{H}'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = \mathcal{H}(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), t) \quad (494)$$



immer noch

$$\dot{Q}_i = [Q_i, \mathcal{H}'] ; \dot{P}_i = [P_i, \mathcal{H}'] \quad (495)$$

erfüllt ist. Normalerweise wird eine allgemeinere Transformation der *Phasenraumkoordinaten*  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{p}$  natürlich nicht das gewünschte Ergebnis liefern, weil die konjugierten Impulse  $P_i = \partial \mathcal{L}' / \partial \dot{Q}_i$  ja von der neuen Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)$  abgeleitet werden und hierdurch mit  $Q_i$  verknüpft sind! Wir nennen die gleichzeitige Transformationen von Orten und Impulsen, bei denen trotzdem die Kanonischen Gleichungen immer noch gültig sind, *kanonische Transformationen*.

Wie finden wir diese erlaubten Transformationen? Hierfür sehen wir uns statt der Hamilton-Funktionen die entsprechenden Lagrange-Funktionen vor und nach der Ort-Impuls-Transformation der Hamilton-Funktion an,

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^{N_k} \dot{q}_i p_i - \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) ; \quad (496)$$

$$\mathcal{L}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = \underline{\mathcal{L}(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), \frac{d}{dt}\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), t)} = \sum_{i=1}^{N_k} \dot{Q}_i P_i - \mathcal{H}'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) . \quad (497)$$

Hier ist  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  der alte Koordinatensatz, für den die kanonischen Gleichungen erfüllt sind, und  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  ist der neue Koordinatensatz, bei dem wir uns nicht sicher sind, ob dieser die kanonischen Gleichungen noch erfüllt. Wir haben in der zweiten Gleichung unser Wissen um das Transformationsverhalten der Lagrange-Funktion benutzt: Koordinaten und deren Geschwindigkeiten werden einfach ersetzt (unterstrichen).

Wir verwenden nun folgendes Kriterium für eine erlaubte Koordinatentransformation: Die neuen Koordinaten  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  sind nur dann erlaubt, wenn die Bewegungsgleichungen von  $Q_i$  im Lagrange-Formalismus immer noch den Euler-Lagrange-Gleichungen gehorchen. Dies ist aber, wie schon in Abschnitt 7.8 gesehen, genau dann der Fall, wenn sich  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{L}'$  höchstens um eine totale Zeitableitung  $dF/dt$  voneinander unterscheiden (Eichinvarianz), d.h. wenn

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathcal{L}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = \underline{\sum_{i=1}^{N_k} (\dot{q}_i p_i - \dot{Q}_i P_i) - \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \mathcal{H}'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)} = \frac{dF(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)}{dt} . \quad (498)$$

Die Funktion  $F(\dots)$  ist beliebig mit  $4N_k$  Variablen. Die notwendige Existenz einer solchen Funktion in dieser Gleichung schränkt die Menge erlaubter Transformationen ein.

Durch die Koordinatentransformationen  $\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  ( $N_k$  Gleichungen) und  $\mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  ( $N_k$  Gleichungen) sind  $2N_k$  der Variablen in  $dF/dt$  jedoch abhängig voneinander, weshalb  $dF/dt$  nur eine Funktion von insgesamt  $2N_k$  *unabhängigen* Variablen sein kann, wie z.B.  $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  oder  $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ . Entscheidend ist nun, dass sobald  $F$  gegeben ist, die Relation (498) automatisch eine damit verbundene Koordinatentransformation impliziert. Deswegen nennt man  $F$  die *Erzeugende einer kanonischen Transformation*. Alle kanonischen Transformationen lassen sich mit einer Erzeugenden darstellen.

Wie erhalten wir aus  $F$  die kanonische Transformation? Legen wir uns beispielsweise auf eine Erzeugende  $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  mit den unabhängigen Variablen  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{Q}$  fest, dann gilt für die rechte Seite von Gl. (498)

$$\frac{dF_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{dt} = \sum_{i=1}^{N_k} \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} . \quad (499)$$

Dies muss mit dem unterstrichenen Term in Gl. (498) identisch sein, und zwar unter der Voraussetzung, dass  $q_i$  und  $Q_i$  unabhängig sind (so gewählt in  $F_1$ ). Das ist nur dann möglich, wenn die Koeffizienten vor  $\dot{q}_i$  und  $\dot{Q}_i$  in Gl. (498) und Gl. (499) identisch sind, also nur wenn

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} ; \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} ; \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t} . \quad (500)$$

Betrachten wir als einfaches Beispiel die Erzeugende  $F_1 = \sum_{i=1}^{N_k} q_i Q_i$ . Wir erhalten hieraus

$$p_i = Q_i ; \quad P_i = -q_i ; \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}' . \quad (501)$$

Diese Transformation vertauscht im Wesentlichen nur die Orte  $q_i$  mit den Impulsen  $p_i$ . Das Vertauschen von Orten und Impulsen ist demnach eine kanonische Transformation. Dies unterstreicht nochmal, dass Orte und Impulse in der Hamiltonischen Beschreibung völlig gleichberechtigt sind. Desweiteren können wir mit  $F_1 = q_i Q_j$  auch die Orte  $q_i$  und die Impulse  $p_j$  verschiedener Koordinaten vertauschen. Auch das ist kanonisch.

Eine Berechnung der kanonischen Transformationen der Familie  $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$  von Erzeugenden verläuft ähnlich zur Familie  $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ , bis auf den Unterschied, dass nun  $\dot{Q}_i$  auf der linken Seite von Gl. (498) eine Funktion von den als unabhängig ausgewählten Variablen  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{P}$  und deren Geschwindigkeiten

(und der Zeit  $t$ ) ist. Dies macht den Koeffizientenvergleich etwas aufwendiger, führt aber letztlich zu

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \quad ; \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t} . \quad (502)$$

(siehe z.B. [3] für die Details und Relationen anderer Familien von Erzeugenden). Die Familie  $F_2$  ist bedeutsam, weil sich mit ihr u.A. Punkttransformationen  $Q_i = Q_i(\mathbf{q}, t)$  erzeugen lassen,

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{i=1}^{N_k} P_i Q_i(\mathbf{q}, t) \quad ; \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i(\mathbf{q}, t) . \quad (503)$$

Dies zeigt nochmals, dass Punkttransformationen kanonisch sind. Beachte, dass man die Familie  $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  *nicht* zur Erzeugung einer Punkttransformation benutzen kann, weil hier  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{Q}$  unabhängige Variablen sind.

**Harmonischer Oszillator** Als abschließendes Beispiel dieses Abschnittes wollen wir eine kanonische Transformation der Hamilton-Funktion des Harmonischen Oszillators durchführen,

$$\mathcal{H}(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{D}{2} x^2 . \quad (504)$$

Wir verwenden hierfür die Erzeugende (fällt vom Himmel)

$$F_1(x, Q) = \sqrt{\frac{D}{4m \tan Q}} x^2 . \quad (505)$$

Hieraus erhalten wir die konjugierten Impulse als Funktionen von  $(x, Q)$ ,

$$p = + \frac{\partial F_1}{\partial x} = \sqrt{\frac{D}{m \tan Q}} x \quad ; \quad P = - \frac{\partial F_1}{\partial Q} = \sqrt{\frac{D}{4m \sin^2 Q}} x^2 . \quad (506)$$

Die erzeugte Koordinatentransformation ist deshalb ( $\omega^2 := D/m$ )

$$x = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \quad ; \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q , \quad (507)$$

die wir in die alte Hamilton-Funktion einsetzen, um die neue Hamilton-Funktion zu erhalten ( $\partial F_2 / \partial t = 0$ ),

$$\mathcal{H}'(Q, P) = \mathcal{H}(q(P, Q), p(P, Q)) = \omega P . \quad (508)$$

Das ist nun interessant! Diese Koordinatentransformation hat die Hamilton-Funktion stark vereinfacht, weil die ‘‘Ortskoordinate’’  $Q$  nun nicht mehr enthalten ist. Dadurch wird  $Q$  zyklisch bzw. der konjugierte Impuls  $P$  wird eine ErhaltungsgröÙe, weil

$$\dot{P} = [P, \mathcal{H}'] = 0 \implies P(t) = P_0 = \text{konst.} \quad (509)$$

und  $Q(t)$  wird linear in der Zeit, weil

$$\dot{Q} = [Q, \mathcal{H}'] = \omega \implies Q(t) = \omega t + Q_0 . \quad (510)$$

Deshalb wird wegen Gl. (507)

$$x(t) = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega^2}} \sin(\omega t + Q_0) . \quad (511)$$

Dies ist die wohlbekannte Bewegungsgleichungen des Harmonischen Oszillators. Wir lernen daraus, dass eine geeignete kanonische Transformation die Behandlung eines Problems stark vereinfachen kann. Die Hamilton-Jacobi-Theorie bietet eine Möglichkeit, Erzeugende gezielt zu suchen, um die Hamilton-Funktion stark zu vereinfachen (skizziert im nächsten Abschnitt).

**Anmerkung** Eine weitere Anwendung der kanonischen Transformationen bietet sich an, wenn eine oder mehrere Koordinaten  $q_i$  periodisch ist bzw. sind. In der weitläufigen Theorie der Winkel-und-Wirkungsvariablen kann man diese Koordinaten und deren konjugierte Impulse in einen neuen Satz  $(q_i, p_i) \mapsto (w_i, J_i)$  transformieren, wobei die ‘‘Wirkungsvariablen’’  $J_i$  ErhaltungsgröÙen und die ‘‘Winkelvariablen’’  $w_i(t) \propto t$  nur noch linear in der Zeit sind, siehe [3]. Genau dies wurde hier beim harmonischen Oszillator angewandt, um die Erzeugende in Gl. (505) zu finden! Nach der kanonischen Transformation wurde  $Q(t)$  linear in der Zeit und  $P(t)$  eine ErhaltungsgröÙe;  $x$  ist periodisch mit der ‘‘Grundfrequenz’’  $\omega$ .

## 10.5 Hamilton-Jacobi-Theorie\*

In der Hamilton-Jacobi-Theorie führt man die Ideen der kanonischen Transformationen der Koordinaten und die der ErhaltungsgröÙen konsequent zusammen. Man stellt nämlich die Frage, welche Erzeugende  $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$  für ein gegebenes System benötigt wird, um *alle* neuen Koordinaten  $Q_i$  und Impulse  $P_i$

Erhaltungsgrößen werden zu lassen, d.h.

$$\dot{Q}_i = [Q_i, \mathcal{H}'] = 0 ; \dot{P}_i = [P_i, \mathcal{H}'] = 0 \quad \forall i . \quad (512)$$

Hierdurch wird die Lösung der Bewegungsgleichungen trivial, weil  $Q_i(t) = Q_i = \text{konst}$  und  $P_i(t) = P_i = \text{konst}$ . Aber auch die ursprünglichen Koordinaten  $q_i$  und  $p_i$  können nun durch Lösung des Gleichungssystems

$$p_i = \frac{\partial F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial q_i} ; Q_i = \frac{\partial F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial P_i} \quad \forall i = 1 \dots N_k \quad (513)$$

zu jedem Zeitpunkt  $t$  ermittelt werden. Hier sind  $Q_i$  und  $P_i$  Konstanten, und  $q_i$  erhalten wir durch Auflösen der  $N_k$  rechten Gleichungen nach  $q_i$ . Sollten wir  $F_2$  also erst mal besitzen, dann sind  $\mathbf{q}(t)$  und  $\mathbf{p}(t)$  die Lösungen eines (nicht-linearen) Gleichungssystems. Die Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung wäre so in ein rein algebraisches Problem verwandelt worden!

Eine Möglichkeit die Relationen (512) zu erhalten, ist eine Erzeugende  $F_2$  einer Kanonische Transformation zu ermitteln, die die neue Hamilton-Funktion  $\mathcal{H}'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  verschwinden läßt, d.h. durch Lösung der

### Hamilton-Jacobi-Gleichung.

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \nabla_{\mathbf{q}} F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)) + \frac{\partial F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial t} = 0 , \quad (514)$$

wobei

$$\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{q}} F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) := \left( \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_{N_k}} \right) . \quad (515)$$

Dies ist der Startpunkt der Hamilton-Jacobi-Theorie. Anstatt die Differentialgleichungen der Orte und Impulse in der Zeit zu lösen, müssen wir nun eine *partielle Differentialgleichung* erster Ordnung in den  $N_k + 1$  Variablen  $(\mathbf{q}, t)$  lösen (mit den  $N_k$  Konstanten  $P_i$ ).

Diese Hamilton-Jacobi-Gleichung ist eine nicht-linear partielle Differentialgleichung, weil die Ableitungen i.A. als quadratische Impulse  $p_i = \partial F_2 / \partial q_i$  in ihr vorkommen. Dies macht die Lösung im konkreten Fall normalerweise schwierig. Das Problem wird aber machbar, wenn Variablen separiert werden können, d.h. wenn (Separationsansatz)

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{i=1}^{N_k} W_i(q_i, \mathbf{P}) + W_{N_k+1}(t, \mathbf{P}) ; \quad (516)$$

die  $W_i$  sind zu bestimmende Funktionen, die nur von einem  $q_i$  oder der Zeit  $t$  und den Konstanten  $P$  abhängen.

Man bezeichnet die Lösung  $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$  als *Prinzipalfunktion* oder *Hamiltonsche Wirkungsfunktion*  $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ . Die Ähnlichkeit dieser Notation mit der Wirkung im Abschnitt 8 ist natürlich kein Zufall. Man kann tatsächlich zeigen, dass die Wirkung  $S[\mathbf{q}(t)]$  der *stationären Lösung*  $\mathbf{q}(t)$  ( $\delta S = 0$ ), die den Anfangspunkt  $\mathbf{q}(t_0)$  und den Punkt  $\mathbf{q}(t)$  verbindet,

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^t dt' \mathcal{L}(\mathbf{q}(t'), \dot{\mathbf{q}}(t'), t'), \quad (517)$$

eine Lösung des Hamilton-Jacobi-Problems ist ( $t$  ist variabel); siehe [3]. Die Wirkung der stationären Lösung ist demnach eine ganz bestimmte Erzeugende einer kanonischen Transformation!

Sollte die Hamilton-Funktion nicht explizit zeitabhängig sein, d.h.  $\partial \mathcal{H} / \partial t = -\partial \mathcal{L} / \partial t = 0$ , dann ist die Zeit immer separierbar:

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = W(\mathbf{q}, \mathbf{P}) - \mathcal{H}_0 t; \quad (518)$$

der Wert der Hamilton-Funktion  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  ist eine Konstante (evtl. die Gesamtenergie  $E$ ). Wir bezeichnen die zeitunabhängige Funktion  $W(\mathbf{q}, \mathbf{P})$  als *charakteristische Funktion*. In dieser Situation reduziert sich die Hamilton-Jacobi-Gleichung auf die partielle Differentialgleichung

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \nabla_{\mathbf{q}} W(\mathbf{q}, \mathbf{P})) = \mathcal{H}_0 \quad (519)$$

der  $N_k$  Variablen  $q_i$ .

**Harmonischer Oszillator** Zum Abschluß sehen wir uns hier den eindimensionalen harmonischen Oszillator als Beispiel an,

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{D}{2} x^2. \quad (520)$$

Die Hamilton-Funktion ist nicht explizit zeitabhängig, so dass wir nur die charakteristische Funktion  $W(x, P)$  als Lösung der vereinfachten Hamilton-Jacobi-Gleichung finden müssen,

$$\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial W}{\partial x}\right) = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \frac{D}{2} x^2 = \mathcal{H}_0, \quad (521)$$

oder

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \pm \sqrt{2m\mathcal{H}_0 - Dmx^2} \implies W = \pm \sqrt{mD} \int dx \sqrt{\frac{2\mathcal{H}_0}{D} - x^2}. \quad (522)$$

Deshalb ist die Prinzipalfunktion

$$S = W - \mathcal{H}_0 t = \pm \sqrt{mD} \int dx \sqrt{\frac{2\mathcal{H}_0}{D} - x^2} - \mathcal{H}_0 t. \quad (523)$$

Die einzige Konstante der Bewegung ist hier  $P = \mathcal{H}_0 = E$ . Um hiermit die Lösung  $x(t)$  zu finden, erinnern wir uns an die zu  $P$  konjugierte Konstante

$$Q = \text{konst} = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{H}_0} = \pm \sqrt{\frac{m}{D}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2\mathcal{H}_0}{D} - x^2}} - t. \quad (524)$$

Lösen wir das Integral (bis auf eine Integrationskonstante  $C$ ), dann erhalten wir

$$Q + t = \pm \sqrt{\frac{m}{D}} \sin^{-1} \left( \frac{D}{2\mathcal{H}_0} x \right) + C; . \quad (525)$$

Aufgelöst nach  $x = x(t)$  ergibt das schließlich

$$x(t) = \pm \sqrt{\frac{2\mathcal{H}_0}{D}} \sin(\omega[t + Q - C]) \quad (526)$$

mit der Kreisfrequenz  $\omega^2 = D/m$ ;  $Q - C$  kann zu einer Konstanten kombiniert werden.

Alles in allem ist hier die Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung umständlicher als die Euler-Lagrange-Gleichung oder die Kanonischen Gleichungen. Jedoch zeigt sich in komplexeren aber separierbaren Problemen der Mechanik die wahre Größe der Hamilton-Jacobi-Theorie, insbesondere in der Störungstheorie (siehe z.B. [3]).

## 10.6 Noether-Theorem\*

Wir wollen uns hier nochmal den Symmetrie-Transformationen zuwenden, die wir im Zusammenhang mit dem Noether-Theorem in Abschnitt 7.4 diskutiert haben. Dort hatten wir uns auf Punkttransformationen im Konfigurationsraum beschränkt. Die obigen Behandlung der kanonischen Transformation deutet aber darauf hin, dass sich die Symmetrie-Transformationen vermutlich verallgemeinern lassen. Hiermit können wir unsere Chancen verbessern, Erhaltungsgrößen eines Problems zu finden.

Wir interessieren uns in diesem Zusammenhang deshalb für kanonische Transformationen  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  und  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , die die Form der Hamilton-Funktion invariant lassen. Für diese *Symmetrie-Transformationen* soll gelten:

$$\mathcal{H}'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = \mathcal{H}(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), t) + \frac{\partial F}{\partial t} \stackrel{?}{=} \mathcal{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t). \quad (527)$$

Die neue Hamilton-Funktion ist einfach die alte mit ausgetauschten Variablen  $q_i = Q_i$  und  $p_i = P_i$ ;  $F$  sei die Erzeugende der Symmetrie-Transformation; der unterstrichene Zwischenschritt gilt immer, die rechte Seite nur bei einer Symmetrie von  $\mathcal{H}$ . Die Bewegungsgleichungen von  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  sind bei einer Symmetrie von  $\mathcal{H}$  in ihrer Form identisch mit denen von  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ .

Als Erzeugende einer Symmetrie-Transformation verwenden wir eine Funktion der Familie  $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ , mit der man z.B. auch Punkttransformationen ausdrücken kann (s.o.). Zusätzlich wollen wir wieder kontinuierliche, differenzierbare Transformationen mit dem Parameter  $\alpha$  betrachten, d.h.  $F_2 = F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t, \alpha)$ ;  $\alpha = 0$  entspricht der Identität  $Q_i = q_i$  und  $P_i = p_i$ . Wie im Abschnitt 7.4 wird nur die erste Ordnung in  $\alpha$  von  $F_2$  für die folgende Diskussion von Interesse sein, so dass wir die Erzeugende allgemein als Taylor-Reihe um  $\alpha$  schreiben können,

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t, \alpha) = \sum_{i=1}^{N_k} q_i P_i + \alpha G(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (528)$$

Der erste Term  $\sum_{i=1}^{N_k} q_i P_i$  entspricht der Erzeugenden der Identität, der zweite Term ist die 1. Ordnung ausgedrückt durch die allgemeine Funktion  $G(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) := \partial F_2 / \partial \alpha$  bei  $\alpha = 0$ .

Weil die Erzeugende eine Funktion von  $\alpha$  ist, werden auch die neuen Phasenraum-Koordinaten  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{P}$  Funktionen von  $\alpha$  sein. In 1. Ordnung in  $\alpha$  lauten diese:

$$Q_i(\alpha) = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \alpha \frac{\partial G}{\partial P_i} \quad (529)$$

und

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i(\alpha) + \alpha \frac{\partial G}{\partial q_i} \iff P_i(\alpha) = p_i - \alpha \frac{\partial G}{\partial q_i}. \quad (530)$$

Wir betrachten nun eine beliebige Funktion  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ . In dieser Funktion ersetzen wir die Argumente durch die transformierten Koordinaten  $\mathbf{p} = \mathbf{P}(\alpha) := \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \alpha)$  und  $\mathbf{q} = \mathbf{Q}(\alpha) := \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \alpha)$ .



Hierdurch ist die neue Funktion

$$f(\mathbf{Q}(\alpha), \mathbf{P}(\alpha), t) = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \left. \frac{\partial f(\mathbf{Q}(\alpha), \mathbf{P}(\alpha), t)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha + O(\alpha^2). \quad (531)$$

Die Änderung  $\delta f$  der so konstruierten Funktion verglichen zur ursprünglichen  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  ist in 1. Ordnung in  $\alpha$ :

$$\left. \frac{\partial f(\mathbf{Q}(\alpha), \mathbf{P}(\alpha), t)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^{N_k} \left( \frac{\partial f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i(\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)}{\partial P_i} \frac{\partial P_i(\alpha)}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \quad (532)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_k} \left( \frac{\partial f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial q_i} \frac{\partial G(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial p_i} - \frac{\partial f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial p_i} \frac{\partial G(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial q_i} \right) \quad (533)$$

$$= [f, G] = \delta f. \quad (534)$$

(Bei  $\alpha = 0$  können wir  $G(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = G(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  ersetzen.)

Zurück zur unserer anfänglichen Fragestellung in Gl. (527) über Symmetrie-Transformationen. *Sollte*  $F_2$  die Erzeugende einer Symmetrie-Transformation sein, dann werden wir  $\mathcal{H}'$  durch Ersetzen der Argumente  $\mathbf{q} = \mathbf{Q}(\alpha)$  und  $\mathbf{p} = \mathbf{P}(\alpha)$  in  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  erhalten, exakt wie bei der eben beschriebenen Funktion  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ . Deswegen wird sich die Hamilton-Funktion *dann* in 1. Ordnung in  $\alpha$  um

$$\mathcal{H}(\mathbf{Q}(\alpha), \mathbf{P}(\alpha), t) - \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \alpha [\mathcal{H}, G] + O(\alpha^2) \quad (535)$$

verändern. Gleichzeitig ist wegen Gl. (527) aber auch *immer* in 1. Ordnung die Relation

$$\mathcal{H}(\mathbf{Q}(\alpha), \mathbf{P}(\alpha), t) - \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \alpha \left. \frac{\partial F_2}{\partial \alpha \partial t} \right|_{\alpha=0} + O(\alpha^2) = \alpha \frac{\partial G}{\partial t} + O(\alpha^2) \quad (536)$$

erfüllt. Vergleichen wir die Gl. (535) und (536), dann finden wir also bei einer Symmetrie-Transformation den Zusammenhang

$$\frac{\partial G}{\partial t} = [\mathcal{H}, G] \quad (537)$$

oder

$$\frac{\partial G}{\partial t} - [\mathcal{H}, G] = 0 \iff \frac{\partial G}{\partial t} + [G, \mathcal{H}] = \frac{dG}{dt} = 0. \quad (538)$$

Die Erzeugende der Symmetrie-Transformation ist selbst eine Erhaltungsgröße! Die Koordinatentransformation einer Symmetrie wird in der Hamilton-Mechanik also direkt durch die Erhaltungsgröße gegeben.

Deswegen sind z.B. der Gesamtdrehimpuls oder der Gesamtimpuls im Hamilton-Formalismus Erzeugende einer Symmetrie, falls sie erhalten sein sollten.

Der Hamilton-Funktion  $\mathcal{H}$  ist eine Erhaltungsgröße, falls  $\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$ . Hieraus ergibt sich insbesondere, dass dann auch  $\mathcal{H}$  eine Erzeugende einer Symmetrie sein muss. Welche ist das? Die erkennen wir sofort, wenn wir uns überlegen, wie sich  $q_i$  und  $p_i$  durch die Koordinatentransformation der Erzeugenden  $G = \mathcal{H}$  verändern (1. Ordnung in  $\alpha$ ):

$$\delta q_i = [q_i, \mathcal{H}] = \dot{q}_i \ ; \ \delta p_i = [p_i, \mathcal{H}] = \dot{p}_i \ . \quad (539)$$

Die Koordinaten werden in der Zeit verschoben. Da die Hamilton-Funktion mit der Gesamtenergie verknüpft ist, muss eine Zeitverschiebungs-Symmetrie mit der Energieerhaltung in Verbindung stehen, wie auch schon in Abschnitt 7.7 diskutiert wurde.

**Anmerkung** In der Lagrange-Mechanik folgt aus einer Symmetrie von  $\mathcal{L}$  eine Erhaltungsgröße. Das Umgekehrt ist jedoch nicht notwendigerweise erfüllt: Wir können evtl. auch eine Erhaltungsgröße finden, ohne das damit eine Symmetrie von  $\mathcal{L}$  verknüpft ist; der Runge-Lenz-Vektor zum Beispiel. In der Hamilton-Mechanik andererseits sind Symmetrien und Erhaltungsgrößen äquivalent, weil die Erhaltungsgröße selbst eine Koordinatentransformation definiert. Der wesentliche Unterschied zur Lagrange-Mechanik besteht darin, dass in der Hamilton-Mechanik Koordinatentransformationen viel weiter gefasst sind.

## 11 Potenzialtheorie\*

Wir wollen in diesem Kapitel das Gravitationsfeld um einen ausgedehnten Körpers berechnen, das auf einen punktförmigen Testkörper der Masse  $m$  bei  $\mathbf{r}$  wirkt.

### 11.1 Massenkontinuum

Das Gravitationspotenzial einer Punktmasse  $m$  im Schwerfeld einer anderen Punktmasse  $m'$  hatten wir schon kennen gelernt als

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{Gmm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (540)$$

Aufgrund des *Superpositionsprinzips* erwarten wir für das Gesamtpotenzial eines Testteilchens der Masse  $m$  im Gravitationsfeld eines  $N$ -Teilchensystems  $(m_i, \mathbf{r}_i)$  die Summe

$$U(\mathbf{r}) = -Gm \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (541)$$

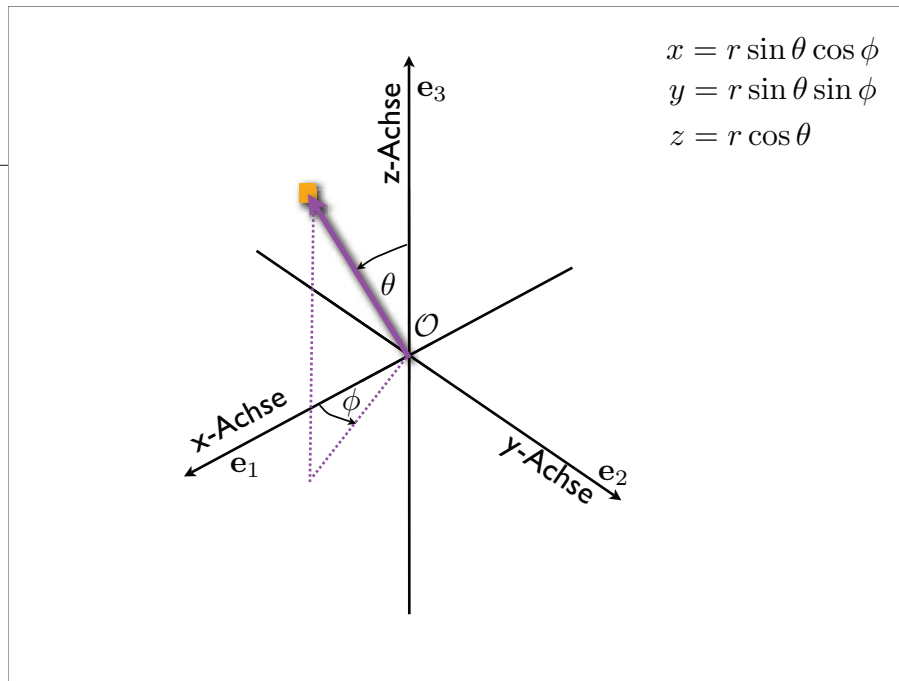
Im Grenzfall eines Massenkontinuums mit der Massendichte  $\rho(\mathbf{r})$  und der infinitesimalen Masse  $dm = \rho(\mathbf{r}')dV'$  im Volumenelement  $dV'$  bei  $\mathbf{r}'$  ergibt sich deshalb

$$U(\mathbf{r}) = -Gm \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (542)$$

### 11.2 Zylindersymmetrie

Für beliebige Massenverteilungen  $\rho(\mathbf{r})$  eines Körpers können wir eine Reihenentwicklung nach sogenannten Multipolmomenten von  $\rho(\mathbf{r})$  durchführen. Hiermit kann eine Näherungslösung für  $U(\mathbf{r})$  gefunden werden, die je nach der gewünschten Genauigkeit für Abstände  $r := |\mathbf{r}|$  deutlich größer als die Ausdehnung des Körpers nur mit wenigen Parametern der Massenverteilung im Körper auskommt. Diese Näherung besteht im Wesentlichen aus dem Potenzial um einen Massenpunkt der Gesamtmasse  $M = \sum_i m_i$  im Massezentrum des Körpers plus Korrekturtermen.

Wir möchten uns aber hier auf einen Spezialfall konzentrieren, die sich bei einer *zylindersymmetrischen* Massenverteilung  $\rho(\mathbf{r})$  anwenden läßt. Damit ist gemeint: Es gibt eine Symmetrieachse entlang des



Basisvektors  $e_3$ , um die wir die  $\rho(\mathbf{r})$  drehen können, ohne die Massenverteilung zu verändern,

$$\rho(D_3 \mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \quad \forall D_3 ; \quad (543)$$

$D_3$  bezeichnet eine beliebige Drehung um die Symmetrieachse. Der betrachtete Körper ist ein Rotationskörper. Typische Rotationskörper sind z.B. Kegel, Zylinder oder auch Ellipsoide.

Aufgrund der Symmetrie der Massenverteilung im Körper legen wir den Koordinatenursprung  $O$  in das Massezentrum  $\mathbf{R}$ , das auf der Symmetrieachse liegen muss, und den Basisvektor  $e_3$  in die Richtung der Symmetrieachse (“z-Achse”). Die Wahl der anderen Basisvektoren  $e_1$  (“x-Achse”) und  $e_2$  (“y-Achse”) ist beliebig, solange die Basis  $\{e_1, e_2, e_3\}$  eine Orthonormalbasis bildet. Wir drücken jeden Ortsvektor  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$  erstmal durch die Kugelkoordinaten  $\{r, \theta, \phi\}$  aus,

$$x = r \sin \theta \cos \phi , \quad (544)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi , \quad (545)$$

$$z = r \cos \theta . \quad (546)$$

Hier ist der Winkel  $\phi$  die Orientierung des Vektors  $\mathbf{r}$  in der  $xy$ -Ebene ( $\phi = 0$ : entlang der  $x$ -Achse;  $\phi = \pi/2$ : entlang der  $y$ -Achse) und  $\theta$  ist der Winkel zwischen  $\mathbf{r}$  und der  $z$ -Achse ( $\theta = 0$ : entlang  $z$ -Achse).

Die Massenverteilung  $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r, \theta)$  kann bei einer Zylindersymmetrie nun nur eine Funktion von  $r$  und  $\theta$  sein und nicht des Winkels  $\phi$ ;  $\phi$  entspricht einer Rotation des Vektors  $\mathbf{r}$  um die Symmetrieachse. Deshalb vereinfacht sich das Volumenintegral (542) in Polarkoordinaten zu einer Integration über nur zwei Variablen,

$$U(\mathbf{r}) = -Gm \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi dr' d\theta' d\phi' r'^2 \sin \theta' \frac{\rho(r', \theta')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (547)$$

$$= -2\pi Gm \int_0^\infty \int_0^\pi dr' d\theta' r'^2 \sin \theta' \rho(r', \theta') \langle |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \rangle, \quad (548)$$

wobei

$$\langle |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \rangle := \int_0^\pi \frac{d\phi'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \angle \mathbf{r}, \mathbf{r}')^{1/2}} \quad (549)$$

der Mittelwert des reziproken Abstandes  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$  für alle Winkel  $\phi'$  sein soll. In der letzten Zeile haben wir die Vektoren  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}'$  durch deren Polarkoordinaten ausgedrückt. Unter  $\angle \mathbf{r}, \mathbf{r}'$  verstehen wir den Winkel, der von  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}'$  aufgespannt wird. Der Ausdruck im Nenner des Integrals ergibt sich aus

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \langle \mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{r} - \mathbf{r}' \rangle^{1/2} = (|\mathbf{r}|^2 + |\mathbf{r}'|^2 - 2\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle)^{1/2} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \angle \mathbf{r}, \mathbf{r}')^{1/2}. \quad (550)$$

### 11.3 Legendre-Polynome

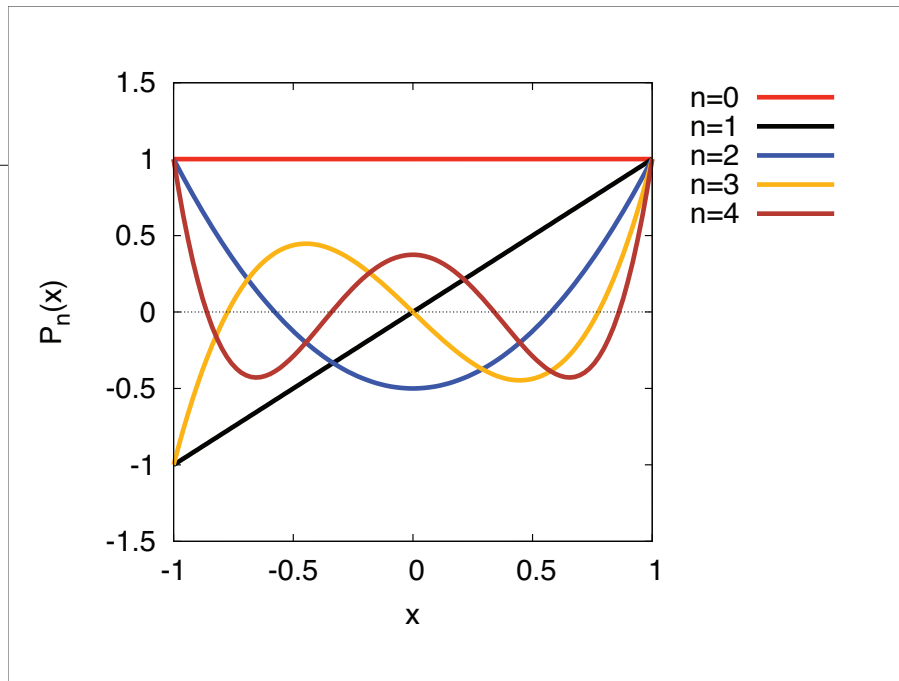
Man kann zeigen, dass sich der Ausdruck  $\langle |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \rangle$  als Reihe

$$\langle |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \rangle = \frac{1}{(r, r')_>} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(r, r')_<}{(r, r')_>} \right)^n P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta') \quad (551)$$

mit den *Legendre-Funktionen*  $P_n(x)$ , die wir gleich beschreiben, entwickeln läßt, z.B. [1]. Mit der Notation  $(r, r')_<$  und  $(r, r')_>$  meinen wir

$$(r, r')_> := \begin{cases} r & , r \geq r' \\ r' & , r < r' \end{cases} ; \quad (r, r')_< := \begin{cases} r & , r < r' \\ r' & , r \geq r' \end{cases}. \quad (552)$$

Diese Fallunterscheidung ist in der Gl. (551) nötig, damit die Reihenentwicklung für  $r \neq r'$  konvergiert, da nur so die Koeffizienten vor den Legendre-Funktionen in der Reihe kleiner als eins werden.



Die Legendre-Polynome sind die Lösungen der linearen Differentialgleichungen

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0. \quad (553)$$

Diese Lösungen können als

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (554)$$

angegeben werden. Die ersten Legendre-Polynome lauten:

$$P_0(x) = 1, \quad (555)$$

$$P_1(x) = x, \quad (556)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad (557)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad (558)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3). \quad (559)$$

Eine wichtige Eigenschaft dieser Funktionenschaar ist, dass sie eine vollständige orthogonale Basis

aller quadratintegrierbaren Funktionen  $f(x)$ , d.h.

$$\int_{-1}^1 dx |f(x)|^2 < \infty, \quad (560)$$

auf dem Intervall  $x \in [-1, 1]$  bilden. Wir können also jede Funktion  $f(x)$  dieses Funktionenraums eindeutig mit Koordinaten bezüglich  $P_n(x)$  darstellen. Orthogonal bedeutet hier, dass

$$\langle P_n(x), P_m(x) \rangle := \int_{-1}^1 dx P_n(x) P_m(x) = \frac{\delta_{mn}^K}{n + 1/2}. \quad (561)$$

Das Integral definiert ein Skalarprodukt  $\langle f(x), g(x) \rangle$  im Vektorraum der quadratintegrierbaren Funktionen. Wir können also eine beliebige (quadratisch integrierbare) Funktion  $f(x)$  eindeutig schreiben als Legendre-Reihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i P_i(x) \quad (562)$$

mit den Koordinaten (Projektion auf die Basisfunktionen)

$$\frac{a_n}{n + 1/2} = \langle f(x), P_n(x) \rangle. \quad (563)$$

Der Faktor  $n + 1/2$  ist hier, weil die Basisfunktionen nicht normiert sind.

Sind die Funktionen  $f(x)$  Funktionen des Winkels  $\theta$  der Art  $f(\cos \theta)$ , dann folgt hieraus

$$f(\cos \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i P_i(\cos \theta) \quad (564)$$

und das Skalarprodukt (Substitutionsregel der Integration)

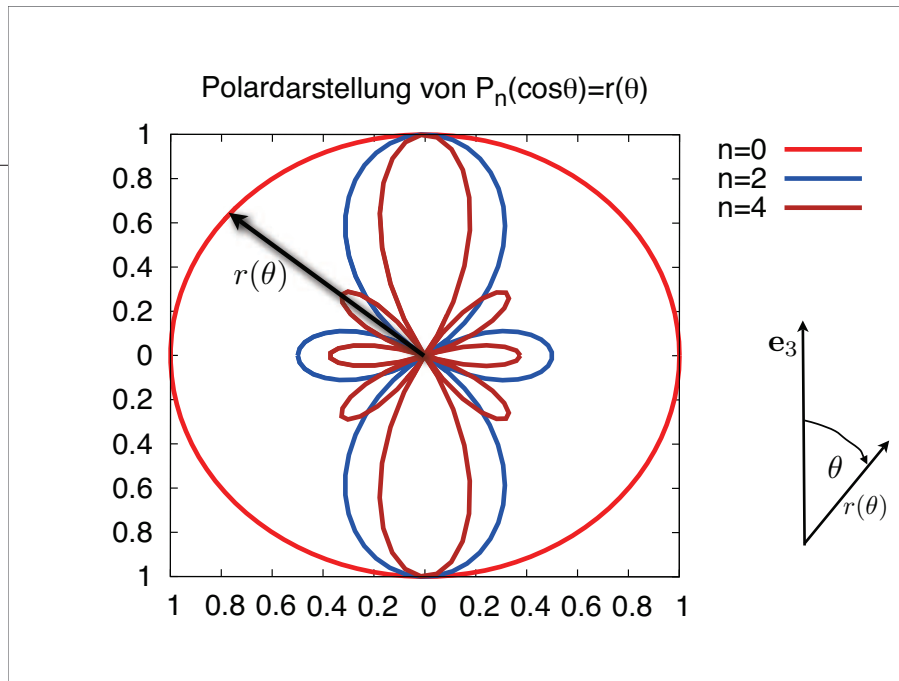
$$\frac{a_n}{n + 1/2} = \int_{-1}^1 d\cos \theta f(\cos \theta) P_n(\cos \theta) = \int_0^\pi d\theta \sin \theta f(\cos \theta) P_n(\cos \theta). \quad (565)$$

## 11.4 Legendre-Entwicklung des Potentials

Wir setzen nun die Legendre-Reihe in Gl. (551) in das Integral für das Gravitationspotential der zylindersymmetrischen Massendichte  $\rho(r, \theta)$  Gl. (548) ein:

$$U(r, \theta) = -\frac{2\pi Gm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \int_0^r dr' r'^2 \int_0^\pi d\theta' \left(\frac{r'}{r}\right)^n \sin \theta' P_n(\cos \theta') \rho(r', \theta') \quad (566)$$

$$- 2\pi Gm \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \int_r^\infty dr' r' \int_0^\pi d\theta' \left(\frac{r}{r'}\right)^n \sin \theta' P_n(\cos \theta') \rho(r', \theta'). \quad (567)$$



Wir erhalten zwei Summen, weil wir unterscheiden mussten, ob die Integrationsvariable  $r'$  größer (zweite Summe) oder kleiner (erste Summe) als der Abstand  $r$  ist.

Gleichzeitig können wir auch die Massendichte als Legendre-Reihe entwickeln (für  $r = \text{konst.}$  ist  $\rho(r, \theta)$  eine Funktion der Art  $f(\cos \theta)$ ; die Koordinaten  $a_n$  hängen i.A. aber von  $r$  ab),

$$\rho(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n(r) P_n(\cos \theta), \quad (568)$$

ohne die Koeffizienten  $\rho_n(r)$  der Reihe an dieser Stelle weiter zu spezifizieren; sie sind die charakteristischen Größen der Massenverteilung des Körpers:

$$\rho_n(r) = (n + 1/2) \int_0^\pi d\theta \sin \theta \rho(r, \theta) P_n(\cos \theta) \quad (569)$$

Wir können uns das so vorstellen: Halten wir  $r = \text{konst.}$  fest, dann wird i.A.  $\rho(r, \theta)$  auf der entsprechenden Kugelschale mit Radius  $r$  entlang des Höhenwinkels  $\theta$  variieren. Die Variationen der Dichte auf der Kugelschale werden durch die Legendre-Polynome  $P_n(\cos \theta)$  für  $n > 0$  beschrieben; der Term  $n = 0$  beschreibt den Mittelwert von  $\rho(r)$  auf der Kugelschale; die Variationsamplitude ist durch die Koordinaten



$\rho_n(r)$  definiert. Sollte  $\rho_n(r) = 0$  sein für  $n > 0$ , dann ist die Dichte auf der Kugelschale konstant, es gibt keine Variationen mit  $\theta$ .

Setzen wir diese Reihe in Gl. (566) ein, erhalten wir nun

$$-\frac{U(r, \theta)}{2\pi Gm} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \int_0^r dr' \left(\frac{r'}{r}\right)^n \frac{r'^2 \rho_n(r')}{(n+1/2)} + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \int_r^{\infty} dr' \left(\frac{r'}{r}\right)^n \frac{r' \rho_n(r')}{(n+1/2)} \quad (570)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\cos \theta)}{(n+1/2)r^{n+1}} \int_0^r dr' r'^{n+2} \rho_n(r') + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\cos \theta)r^n}{n+1/2} \int_r^{\infty} dr' r'^{1-n} \rho_n(r') \quad (571)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2P_n(\cos \theta)}{2n+1} \left[ \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^r dr' r'^{n+2} \rho_n(r') + \underbrace{r^n \int_r^{\infty} dr' r'^{1-n} \rho_n(r')} \right] \quad (572)$$

unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsrelation (561) der Legendre-Polynome. Ein Beitrag (links) stammt von der Masse des Körpers, die sich innerhalb von  $r$  befindet, der andere (rechts unterstrichen) von der Masse außerhalb. Falls wir weit genug vom Körper entfernt sind, dann können wir den rechten Term vernachlässigen, weil dort  $\rho(r) \approx 0$ . Wichtiger noch, die Koeffizienten des linken Terms fallen mit  $\propto r^{-(n+1)}$  ab: Befinden wir uns weit genug vom Massenzentrum des Körpers entfernt, dann können wir diese Reihe nach einigen wenigen Summanden abbrechen. Bei welcher Ordnung wir genau abbrechen, hängt von der Genauigkeit ab, die wir erreichen wollen.

Sehen wir uns die Legendre-Reihen in Gl. (572) genauer an, dann merken wir, dass wir aus den Legendre-Koeffizienten  $\rho_n(r)$  der Masseverteilung direkt die Legendre-Koeffizienten  $U_n(r)$ ,

$$U(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(r) P_n(\cos \theta), \quad (573)$$

des Gravitationspotenzials ableiten können:

$$U_n(r) = -\frac{4\pi Gm}{2n+1} \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^r dr' r'^{n+2} \rho_n(r') - \frac{4\pi Gm}{2n+1} \underbrace{r^n \int_r^{\infty} dr' r'^{1-n} \rho_n(r')}. \quad (574)$$

Das ist das wichtigste Resultat dieses Kapitels. Aus den Koordinaten  $\rho_n(r)$  der Legendre-Entwicklung der Massendichte folgen die Koordinaten  $U_n(r)$  des Potentials. Üblicherweise benötigen wir nur einige Koordinaten bis zu einer kleinen Ordnung  $n \leq N$ . Den unterstrichenen Term brauchen wir außerdem nur dann, wenn wir uns innerhalb des Körpers befinden.

## 11.5 Sphärisch-symmetrische Potenziale

Im einfachsten Fall ist  $\rho(r, \theta)$  nur eine Funktion des Abstandes  $r$ , also nicht mal des Winkels  $\theta$ . Dies entspricht einer sphärisch-symmetrischen oder einer so-geannten radialsymmetrischen Verteilung; die Massendichte ist dann nur eine Funktion der Kugelschale im Abstand  $r$  vom Ursprung. Die Massendichte eines Planeten oder eines Sterns würde man z.B. in erster Näherung so beschreiben.

Für derartige Objekte können wir alle Legendre-Koeffizienten  $n > 0$  ignorieren, weil keine  $\theta$ -Abhängigkeiten auftreten. Die Legendre-Reihe besteht dann nur aus dem ersten Term  $n = 0$ , so dass wegen  $P_n(x) = 1$  die Relationen  $\rho_0(r) = \rho(r)$  und

$$U(r) = U_0(r) = -\frac{4\pi Gm}{r} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') - 4\pi Gm \int_r^\infty dr' r' \rho(r') \quad (575)$$

$$=: -\frac{GmM(< r)}{r} - \underbrace{4\pi Gm \int_r^\infty dr' r' \rho(r')} \quad (576)$$

gegeben sind. Wir haben hier mit  $M(< r) = 4\pi \int_0^r dx x^2 \rho(x)$  die gesamte Masse innerhalb der Schale mit Radius  $r$  definiert.

Befinden wir uns außerhalb des Körpers der Ausdehnung  $r_0$ , d.h.  $\rho(r \geq r_0) = 0$ , dann ist das Potenzial von dem einer Punktmasse nicht zu unterscheiden, weil  $M(< r) = M = \text{konst.}$ ,

$$U(r) = -\frac{GmM}{r} \quad (577)$$

(der unterstrichene Term verschwindet).

Sollte dieser Körper auch noch homogen sein, d.h.  $\rho_0 = \text{konst.}$ , dann ist das innere Potenzial,  $r \leq r_0$ ,

$$U(r) = -\frac{4\pi Gm\rho_0}{3r} r^3 - \frac{2\pi Gm\rho_0(r_0^2 - r^2)}{3} = \frac{2\pi Gm\rho_0}{3} r^2 + C = \frac{GMm}{r_0^2} \frac{r^2}{r_0} + C = \frac{mg}{2r_0} r^2 + C, \quad (578)$$

wobei  $C := -2\pi Gm\rho_0 r_0^2$  eine bedeutungslose Konstante ist und  $g := GM/r_0^2$  die Schwerebeschleunigung an der Oberfläche des Körpers;  $M = 4\pi\rho_0 r_0^3/3$  ist die Gesamtmasse der homogenen Kugel. Im Inneren der Kugel wirkt eine lineare Kraft in Richtung des Mittelpunktes. Diese lineare Kraft ist deshalb  $F_r = -\partial U(r)/\partial r = -mgr/r_0$ . Lassen wir einen Stein von der Oberfläche  $r_0$  in einen geraden Schacht zum Mittelpunkt fallen, dann folgt dieser Stein deshalb der Bewegungsgleichung eines harmonischen

Oszillators,

$$m\ddot{r} + \frac{mg}{r_0}r = 0, \quad (579)$$

mit der Periodendauer  $T = 2\pi\sqrt{r_0/g}$ .

Wäre die Erde eine homogene Kugel mit Radius  $r_0 \approx 6000$  km und  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>, dann entspräche dies einer Oszillation mit der Dauer  $T \approx 82$  min. Bei einer rotierenden Kugel würde dieses Experiment aber nur an den Polen mit einem Schacht entlang der Rotationsachse funktionieren, weil überall sonst die Corioliskraft und die Zentrifugalkraft die Bahn des Steins von einem geraden Fall ablenken würden.

## 11.6 Potenzial einer Scheibe

Als zweites Beispiel wollen wir eine zylindersymmetrische Scheibe betrachten, die in der  $xy$ -Ebene liegt. Das Massendichteprofil in der Scheibe, für  $\theta = \pi/2$  oder  $\cos\theta = 0$ , ist  $\rho(r)$  und außerhalb  $\rho(r) = 0$ . Die Ausdehnung der Scheibe sei außerdem begrenzt durch  $\rho(r) = 0$  für  $r \geq a$ ;  $a$  ist der Radius der Scheibe. In Polarkoordinaten ist die Massendichte der Scheibe also

$$\rho(r, \theta) = \rho(r)\delta_D(\cos\theta). \quad (580)$$

Was ist das Gravitationspotenzial  $\Phi(r, \theta) := U(r, \theta)/m$  außerhalb der Scheibe ( $r \geq a$ )? Hierfür berechnen wir zuerst die Legendre-Momente der Dichteverteilung,

$$\frac{\rho_n(r)}{n+1/2} = \int_{-1}^1 d\cos\theta \rho(r, \theta) P_n(\cos\theta) = \rho(r) \int_{-1}^1 dx \delta_D(x) P_n(x) = \rho(r) P_n(0). \quad (581)$$

Wegen der Dirac-Funktion ist dies sehr einfach. Nun erhalten nach Gl. (574) wir für die Momente des Potenzials bei den Abständen  $r \geq a$  die Koeffizienten

$$\Phi_n(r) = \frac{U_n(r)}{m} = -\frac{2\pi G}{n+1/2} \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^a dr r^{n+2} \rho_n(r) = -\frac{2\pi G P_n(0)}{r^{n+1}} \int_0^a dr r^{n+2} \rho(r) =: -\frac{G P_n(0) M_n}{2r^{n+1}}. \quad (582)$$

Die Ausdrücke  $M_n = 4\pi \int_0^a dr r^{n+2} \rho(r)$  sind hier Konstanten, die von den Details der Verteilung der Masse in der Scheibe abhängen. Für  $n = 0$  ist  $M := M_0$  die Gesamtmasse der Scheibe, wie man einfach nachrechnen kann. Das gesuchte Potenzial ist also die Reihe

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{GM}{2r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n P_n(0)}{M r^n} P_n(\cos\theta) = -\frac{GM}{2r} \left( 1 - \frac{M_2}{M} \frac{P_2(\cos\theta)}{2r^2} + \frac{M_4}{M} \frac{3P_4(\cos\theta)}{8r^4} + \dots \right). \quad (583)$$

Die Terme für ungerade  $n$  verschwinden, weil dann  $P_n(0) = 0$  in diesen Fällen. Ansonsten haben wir  $P_0(0) = 1$ ,  $P_2(0) = -\frac{1}{2}$  und  $P_4(0) = \frac{3}{8}$ , usw.

Im Gegensatz zu einer radialsymmetrischen Dichteverteilung sieht eine rotationssymmetrische Scheibe außerhalb der Scheibe also *nicht* wie eine Punktmasse aus, es sein denn es ist  $M_n = 0$  für  $n > 0$ . Selbst in der Scheibenebene finden wir Abweichungen vom  $1/r$ -Potenzial einer Punktmasse,

$$\Phi(r, \theta = 0) = -\frac{GM}{2r} \left( 1 - \frac{M_2}{M} \frac{1}{4r^2} + \frac{M_4}{M} \frac{9}{64r^4} + \dots \right). \quad (584)$$

Dieses Potenzial bei  $\theta = 0$  hat eine konkrete Anwendung. Betrachten wir etwa im Sonnensystem die Bewegung von Planeten in der Ebene der Erdbahn, dann kann man sich aus der Perspektive eines Planeten P1 die Masse eines anderen Planeten P2 näherungsweise ausgeschmiert auf einen Ring vorstellen; der Ring hat den Radius des mittleren Sonnenabstands der Bahn von P2. Dies erzeugt eine kleine Störung der P1-Bahn mit einem Störpotenzial wie dem obigen. Da die Störung kein reines  $1/r$ -Potenzial ist, wird dies eine Periheldrehung der Bahn von P1 hervorrufen; der Runge-Lenz-Vektor ändert dadurch seine Richtung (Abschnitt 4.8). Für mehr Details siehe [1].

## Literatur

- [1] R. Fitzpatrick. *An Introduction to Celestial Mechanics*. September 2012.
- [2] J. Honerkamp and H. Römer. *Klassische Theoretische Physik: Eine Einführung*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2012.
- [3] F. Kuypers. *Klassische Mechanik: mit über 300 Beispielen und Aufgaben mit Lösungen*. Lehrbuch Physik. John Wiley & Sons, Limited, 2008.
- [4] H.R. Petry and B.C. Metsch. *Theoretische Mechanik*. Oldenbourg, 2005.
- [5] Peter Schneider. *Einführung in die Extragalaktische Astronomie und Kosmologie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.