



Klassische Theoretische Physik: Elektrodynamik

Kaustuv Basu

(Deutsche Übersetzung: Jens Erler)

Argelander-Institut für Astronomie
Auf dem Hügel 71

kbasu@astro.uni-bonn.de

Website:
www.astro.uni-bonn.de/TP-L

Literturvorschläge:

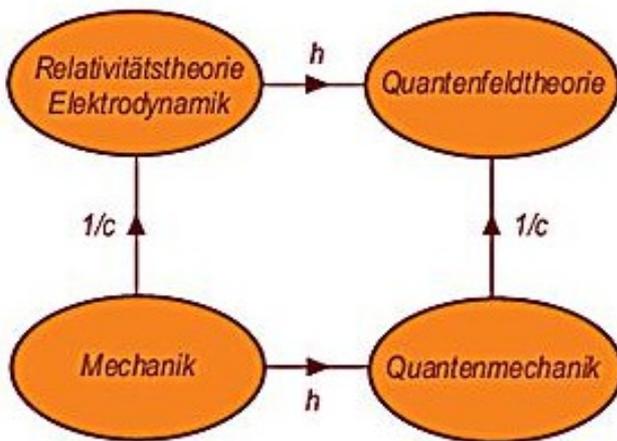
- 1) Online buch (und die Übungen) von Bo Thide: www.plasma.uu.se/CED/Book/
- 2) Nolting: Grundkurs Theoretische Physik 3: Elektrodynamik
- 3) *Feynman-Vorlesungen über Physik: Band II (Elektromagnetismus und Struktur der Materie)*
- 4) Skript von J. Krug: www.thp.uni-koeln.de/~miv/SS09/ED.pdf
- 5) Skript von E. Arrigoni: <http://itp.tugraz.at/~arrigoni/vorlesungen/elektrodynamik/scripts-elektro/actual/script.html>

1. Vorbemerkungen

Es bedurfte des Genies James Clerk Maxwell, um in der Mitte des 19. Jahrhunderts die Theorie der Elektrizität und der damals unabhängigen Theorie des Magnetismus in einer Supertheorie, des Elektromagnetismus bzw. Klassischen Elektrodynamik (CED) zu vereinen. Gleichzeitig wurde auch festgestellt, dass die Optik eine Teildisziplin dieser Supertheorie ist.

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts untersuchte Hendrik Antoon Lorentz die Theorie der Elektrodynamik weiter auf mikroskopischer Ebene und ebnete den Weg für die Spezialtheorie der Relativität, die 1905 durch Albert Einstein in ihrer Gesamtheit ausformuliert wurde.

In den 1930er Jahren erweiterte Paul Adrien Maurice Dirac die Elektrodynamik in eine symmetrischere Form, welche den Magnetismus und Elektrische Ladungen einschloss. Dirac hat mit seiner relativistischen Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie bereits in den 1920er Jahren den Grundstein für die Quantenelektrodynamik (QED) gelegt – die relativistische Quantentheorie für elektromagnetische Felder und deren Zusammenspiel mit Masse, wofür Richard Phillips Feynman, Julian Seymour Schwinger und Sin-Itiro Tomonaga 1965 den Nobelpreis für Physik erhielten. Um die gleiche Zeit war es Physikern wie Sheldon Glashow, Abdus Salam und Steven Weinberg möglich die Elektrodynamik mit der schwachen Wechselwirkungstheorie zu vereinen. So haben sie eine andere Supertheorie, die elektroschwache Theorie entwickelt – eine Leistung, die ihnen 1979 den Nobelpreis für Physik einbrachte. Die moderne Theorie der starken Interaktionen, die Quanten Chromodynamik (QCD) ist stark von CED und QED beeinflusst.



Der Schwerpunkt der klassischen Elektrodynamik ist primär die Beschreibung elektrischer und magnetischer Felder, E und B , welche über die Maxwell Gleichungen mit lokalisierten elektrischen Ladungen und Strömen verknüpft sind. Dabei werden Annahmen wie das Vorhandensein von Punktladungen und kontinuierlichen Strömen gemacht, welche nur Näherungen sind und nur mit Hilfe der Quantenmechanik korrekt beschrieben werden können. Jedoch liefern die Maxwell Gleichungen auf makroskopischen Skalen Ergebnisse in perfekter Übereinstimmung mit Experimenten und die Elektrodynamik wurde mehr Größenskalen getestet als jede andere physikalische Theorie.

Die Feldgleichungen der Elektrodynamik sind bereits kovariant, da sich elektromagnetische Strahlung stets mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Daher gibt es keinen nichtrelativistischen Grenzfall wie in der klassischen Mechanik. Die Kovarianz unter Lorentz-Transformation erlaubt es die Elektrodynamik als „klassische Feldtheorie“, ausgedrückt über die Lagrange-Dichte und die Hamilton-Funktion, zu beschreiben. Für die Elektromagnetische Feldtheorie entwickelte, allgemeine Prinzipien wie die CPT-Invarianz und Eichbedingungen können daher später auch auf jede andere (fortgeschrittene) Feldtheorie angewendet werden.

1.1 Einheiten

Eine Plage der Elektrodynamik sind die verschiedenen Einheitensysteme, die die Verständigung zwischen Physikern erschwert. Dies ist weit schlimmer als in der klassischen Mechanik, wo das zweite Newtonsche Gesetz immer

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

ist, egal in welchen Einheiten die Kraft \mathbf{F} , die Masse m oder die Beschleunigung \mathbf{a} gemessen werden.

Dies ist aber nicht der Fall in der Elektrodynamik, wo je nach Einheitensystem die Gleichungen anders lauten. Betrachten wir das Coulomb-Gesetz, das die Kraft zwischen zwei Ladungen q_1 und q_2 im Abstand r angibt:

$$\frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{Gaussian}), \quad \text{or} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{SI}), \quad \text{or} \quad \frac{1}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{HL}).$$

Das CGS-System hat theoretische Vorteile. Das SI-System verwendet gebräuchliche Einheiten aus dem täglichen Leben wie Volt, Ampere und Watt, und wird auch im folgenden benutzt. Auch die Lehrbücher verfahren hier nicht einheitlich, also Vorsicht bei der Konsultation anderer Literatur!

1.3 Erklärung des SI-Einheiten

Im folgenden erklären wir, wie das SI Einheitensystem (Système International) in der Elektrodynamik verwendet wird. Viele Bücher führen einen Vergleich zwischen SI- und CGS-Einheitensystem für die Maxwell Gleichungen und andere wichtige Relationen der Elektrodynamik aus.

Im SI Einheitensystem ist sichergestellt, dass mechanische und elektrische Energie in der selben Einheit, dem Joule ($J=N\cdot m$) gemessen werden. Die Grundeinheiten des Systems sind m , kg , s , A (Ampere), K (Kelvin) ..., woraus sich z.B. die Einheit der Kraft, das Newton zusammensetzen lässt ($N = kg\cdot m/s^2$).

Die Coulomb Kraft die zwischen zwei Ladungen q_1 und q_2 mit Abstand d wirkt ist:

$$\mathbf{F}_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} = q_1 \mathbf{E}$$

Ein ähnlicher Zusammenhang ist das Ampèresche Gesetz, welches die Kraft auf einen Leiter L_2 angibt, welcher vom Strom I_2 durchflossen wird und in Wechselwirkung mit einem zweiten Leiter mit Strom I_1 im Abstand d steht.

$$\mathbf{F}_m = k_m \frac{2I_1 I_2 L_2}{d} = I_1 L_2 \mathbf{B}$$

Die Reihenfolge der Indices wird später die Definition von k_m erleichtern. Da $I = dq/dt$ gilt, implizieren die oberen Gleichungen, dass E/B die Einheiten einer Geschwindigkeit haben und k_e/k_m eine Konstante mit der Einheit Geschwindigkeit² ist. Daraus leiten wir die korrekten Dimensionen der Lorentzkraft ab.

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Mit Hilfe der Konstanten k_e und k_m können die Maxwell Gleichungen umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{k_m}{k_e} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{k_m}{k_e} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind ebene Wellen, welche sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten (Experimentell bestätigt). Daher gilt:

$$\frac{k_e}{k_m} = c^2$$

Im SI Einheitensystem ist der Wert der Lichtgeschwindigkeit exakt festgelegt. Das bedeutet, dass die Einheit meter über die Lichtgeschwindigkeit definiert ist: $c = 299\,792\,458\text{ m/s}$

Man kann zeigen, dass die Einheit der Energie dem Joule ($J=N\cdot m$) entspricht, wenn:

$$k_m = 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

Letztendlich vermeidet das SI Einheitensystem den Faktor 4π , wie er in den Maxwell Gleichungen steht, indem die magnetische Feldkonstante μ_0 und die elektrische Feldkonstante ϵ_0 eingeführt werden.

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi k_m = 4\pi 10^{-7} \text{ N/A}^2 \\ \epsilon_0 &= 1/\mu_0 c^2 = 1/4\pi k_e \end{aligned}$$

Beide Feldkonstanten haben keine besondere physikalische Interpretation.

	SI	Gaussian
Maxwell's equations		
In general:	$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \partial \mathbf{E} / \partial t \end{cases}$
In matter:	$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \partial \mathbf{D} / \partial t \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_f + \frac{1}{c} \partial \mathbf{D} / \partial t \end{cases}$
D and H		
Definitions:	$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \end{cases}$	$\begin{cases} \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} \end{cases}$
Linear media:	$\begin{cases} \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, & \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, & \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \end{cases}$	$\begin{cases} \mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}, & \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, & \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \end{cases}$
Lorentz force law	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$	$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
Energy and power		
Energy:	$U = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) d\tau$	$U = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + B^2) d\tau$
Poynting vector:	$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$	$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$
Larmor formula:	$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3}$	$P = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3}$

Tabelle aus D. J. Griffiths, "Introduction to Electrodynamics"

2. Die Maxwell'schen Gleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{0} \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{j}\end{aligned}$$

Zu Maxwells Zeit was er noch nicht üblich, mit abstrakten Feldern zu argumentieren. Maxwell diskutierte seine Ideen anhand eines Modells, in dem das Vakuum einem elastischen Festkörper ähnlich war. Er versuchte, auch den Sinn seiner neuen Gleichung mit Hilfe des mechanischen Modells zu erklären. Heute verstehen wir besser, daß das, was zählt, die Gleichungen selbst sind und nicht das Modell, mit dem sie gefunden wurden. Wir können nur danach fragen, ob die Gleichungen richtig oder falsch sind. Die Antwort geben die Experimente, und zahllose Experimente haben die Maxwell'schen Gleichungen bestätigt. Er trug alle Gesetze der Elektrizität und Magnetismus zusammen und machte daraus eine vollständige und herrliche Theorie.

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{m \dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}}} = q \left(\vec{E}(\vec{\mathbf{x}}, t) + \dot{\mathbf{x}} \times \vec{B}(\vec{\mathbf{x}}, t) \right)$$

Als nächstes haben wir das Kraftgesetz aufgeschrieben, da alle elektrischen und magnetischen Felder und uns nichts sagen, ehe wir nichts wissen, wie sie auf die Ladungen wirken. Kennen wir jedoch \mathbf{E} und \mathbf{B} , so können wir die Kraft finden, die auf einen Körper wirkt, der die Ladung q hat und sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt.

2.1 Maxwells-Gleichungen in Integralform

Die integrale Form der Grundgesetze erhält ein-, zwei- oder dreidimensionale Objekte, z.B. lineare Leiter, Leiterschleifen, räumliche Ladungsverteilungen oder Ähnliches, und hängt daher immer von konkreten experimentellen Anordnungen ab.

Um den Zusammenhängen zwischen scheinbar ganz unterschiedlichen Phänomenen auf den Grund zu sehen, muss man aus den Integraler form der empirisch getesteten Gesetze auf *lokale Gleichungen* übergehen. Lokal heißt sie, weil sie durch die Ladungsdichte, die Stromdichte und die Ableitungen der Felder zu einer Zeit t und an einem Punkt \mathbf{x} ausgedrückt sind. Die integrierte Form der Maxwellgleichungen hingegen ist auf Raumgebiete, Flächen und Kurven bezogen.

S ist eine Fläche mit Orientierung, ∂S ihre Randkurve mit dem tangentialen Linienelement $d\mathbf{l}$ (oder $d\mathbf{x}$); $d\mathbf{A}$ ist ein Flächenelement von A , multipliziert mit dem Vektor der äußeren Normalenrichtung.

Lokaler form:

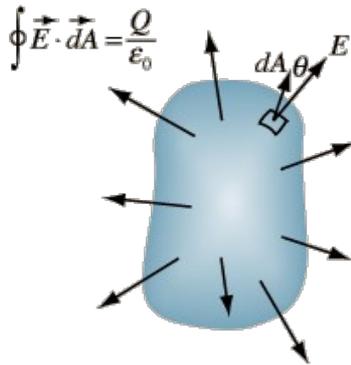
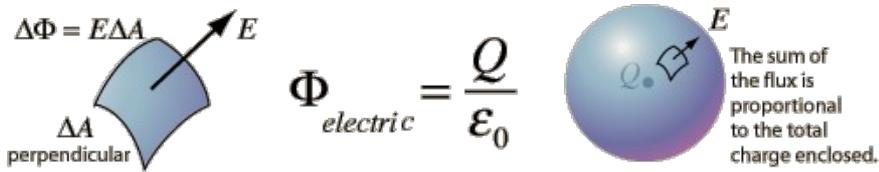
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$$

Integralform:

$$\oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{in}V}$$

in Worten:

Der (elektrische) Fluß durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V ist direkt proportional zu der elektrischen Ladung in seinem Inneren.

**Lokaler form:**

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Integralform:

$$\oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

in Worten:

Der magnetische Fluss durch die geschlossene Oberfläche eines Volumens ist gleich der magnetischen Ladung in seinem Inneren, nämlich Null, da es keine magnetischen Monopole gibt.

Lokaler form:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

Integralform:

$$\oint_{\partial S} d\vec{x} \cdot \vec{E} = -\frac{d}{dt} \int_S d\vec{A} \cdot \vec{B}.$$

in Worten:

Die elektrische Zirkulation über der Randkurve ∂S einer Fläche S ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch die Fläche.

Lokaler form:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$

Integralform:

$$\oint_{\partial S} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_{\text{durch } S} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S d\vec{A} \cdot \vec{E}.$$

in Worten:

Die magnetische Zirkulation über der Randkurve ∂S einer Fläche S ist gleich der Summe aus dem (elektrischen) Strom und der zeitlichen Änderung des elektrischen Flusses durch die Fläche.

2.2 Maxwells Gleichungen in Komponentform

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \longrightarrow \frac{\partial E_i}{\partial x_i} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \longrightarrow \frac{\partial B_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \longrightarrow \epsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial t} B_i$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \longrightarrow \epsilon_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial x_j} = \mu_0 j_i + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_i}{\partial t}$$

Mathematische Exkurs: Helmholtz-Theorem

(Fundamentalsatz der Vektoranalysis)

Das Fundamentalsatz der Vektoranalysis oder Helmholtz-Theorem aussagen, dass jedes differenzierbare und im Unendlichen schnell genug abfallende (schneller als $1/r$) Vektorfeld in drei Dimensionen als Summe eines divergenzfreien (solenoidalen, quellenfreien) Vektorfeldes und eines rotationsfreien (wirbelfreien) Vektorfeldes ausgedrückt werden kann.

Ein wirbelfreies Feld als Gradient eines skalaren Feldes $\phi(\mathbf{r})$ dargestellt werden kann, während folgt, dass jedes quellenfreie Feld als Rotation eines anderen Vektorfeldes $\psi(\mathbf{r})$ geschrieben werden kann. Damit gilt für ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ die Aufteilung

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \times \vec{\psi}$$

2.3 Kontinuitätsgleichung

Die Ladungserhaltung erfordert, dass die Ladungsdichte an jedem Raumpunkt mit der Stromdichte in Umgebung dieses Punktes durch die Kontinuitätsgleichung verknüpft ist:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Diese Gleichung drückt den physikalischen Sachverhalt aus, dass eine zeitliche Abnahme der Ladung innerhalb eines kleinen Volumens einem durch die Oberfläche dieses Volumens austretenden Ladungsstrom entsprechen muss, da der Gesamtbetrag der Ladung erhalten bleibt.

Die Kontinuitätsgleichung gehört nicht direkt zu den Maxwell Gleichungen, sondern ist vielmehr eine Bedingung für diese.

Lösung: Wir berechnen $\nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$ auf zwei Arten:

Schritte 1. Zeitableitung der Gauss'sche Gesetz:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \rho$$

Schritte 2. Divergenz der Ampère-Maxwells Gesetz:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$

Use $\nabla \cdot (\nabla \times) \equiv 0$ and $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$:

$$\implies \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{j}$$

Zum Vergleich gibt es die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Die (relativistische) kovariante Form der Kontinuitätsgleichung, sowie der Maxwell Gleichungen, wird in einem späteren Kapitel besprochen.

2.4 Diracs symmetrische Maxwell Gleichungen

Trotz ihrer mathematischen Schönheit sind die Maxwell Gleichungen asymmetrisch! Um ihre Symmetrie zu erreichen postulierte Dirac die Existenz magnetischer Monopole, welche durch die magnetische Ladungsdichte ρ^m und die magnetische Flussdichte \mathbf{j}^m repräsentiert werden. Mit diesen hypothetischen Größen lassen sich die Maxwell Gleichungen symmetrisieren.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho^e}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho^m$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \mathbf{j}^m$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}^e$$

Der Kontinuitätsgesetz der magnetischen Ladung ist

$$\frac{\partial \rho^m}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}^m = 0$$

Trotz des bisherigen Ausbleibens eines solchen Hinweises wollen wir uns dem genialen Vorschlag Diracs zuwenden. Er untersuchte der quantenmechanische Problem eines Elektrons bei Anwesenheit eines magnetischen Monopoles und zeigte, daß aus Konsistenzgründen die Quantisierungsbedingung

$$\frac{eg}{4\pi\hbar} = \frac{\alpha g}{Z_0 e} = \frac{n}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

erfüllt sein muß, wenn e die Ladung des elektrons, $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ die Feinstrukturkonstante ($\alpha \approx 1/137$) und g die magnetische Ladung des Monopols bedeuten.

2.4 Maxwell-Gleichungen in Materie

Zu Maxwells Zeiten gab es noch kein Verstehen der atomaren Struktur von Materie, so dass die Gründer der Elektrodynamik ihr Fach anders angingen als wir es heutzutage tun. Ohne die physikalische Natur der Ladung und des Stroms zu kennen, richtete sich ihre Aufmerksamkeit auf die Reaktion des Materials unter Einfluss von externen Ladungen und Strom.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

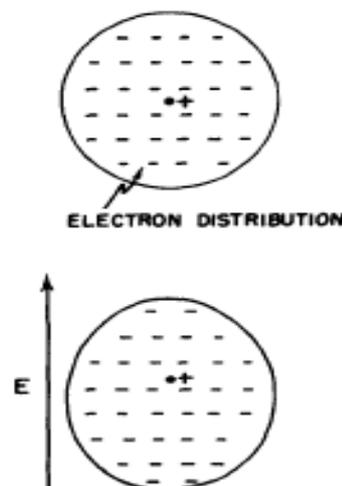
Die ein bisschen verwirrende Bezeichnung von \mathbf{D} und \mathbf{E} (nach Maxwell, Beschreibung von Feldern in Materie) und \mathbf{H} und \mathbf{B} (nach Thomson, Beschreibung von magnetischen Feldern in Materie) ist in der Literatur festgefahren. Trotzdem helfen in einigen Situation, die vier Feldformalismen Berechnung zu vereinfachen.

Wir nehmen an, dass die Felder klein und die Reaktion der Materie linear ist.

$$\mathbf{D} \approx \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{H} \approx \mu^{-1} \mathbf{B}$$

Hier \mathbf{D} ist die dielektrische Flußdichte (oder dielektrische Verschiebungsfeld) und \mathbf{H} ist das makroskopische Magnetfeld.



2.4.1 Polarisation und dielektrische Verschiebungsfeld

Traditionell verwendet man ein Vektorfeld $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$, genannt als Polarisation, und wir verbinden damit die gebundene Ladungen in die dielektrische Materie. Wenn wir eine externe Feldstärke haben und das Gauss'sche Gesetz anwenden haben (hier "true" "frei")

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho^{\text{total}}(t, \mathbf{x})}{\epsilon_0} = \frac{\rho^{\text{true}}(t, \mathbf{x}) + \rho^{\text{pol}}(t, \mathbf{x})}{\epsilon_0} = \frac{\rho^{\text{true}}(t, \mathbf{x}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(t, \mathbf{x})}{\epsilon_0}$$

Für das dielektrische Verschiebungsfeld wir definiere

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{P}(t, \mathbf{x})$$

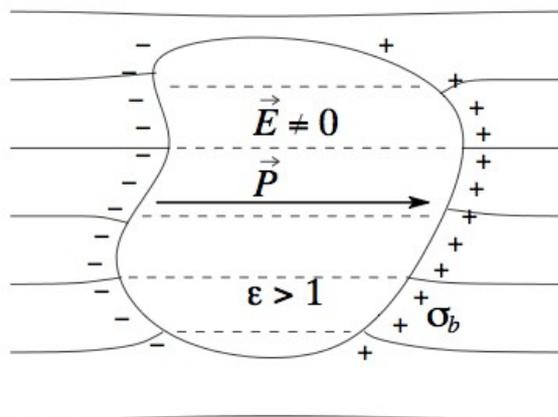
Aus den oben genannten zwei Gleichungen ergibt einem von die Zwei makroskopische Maxwell Gleichungen

$$\nabla \cdot [\epsilon_0 \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{P}(t, \mathbf{x})] = \nabla \cdot \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \rho^{\text{true}}(t, \mathbf{x})$$

Noch eine Annäherung an das Polarisationsfeld ist linear mit der Feldstärke \mathbf{E}

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{x}) = \epsilon_0 \chi_e(t, \mathbf{x}) \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$$

ϵ_e bedeutet die Suszeptibilität der dielektrischen Materie, das kann im Prinzip richtungsabhängig sein ("Doppelbrechung").



2.4.2 Makroskopische Magnetfeld und magnetisierte Medien

In einem magnetischem Medium können drei Arten von Strömen auftreten:

- 1) Analog zum elektrischen Strom kann ein freier Strom j^{fre} auftreten, welcher freie (oder wahre) Ladung transportiert.
- 2) Das Polarisationsfeld \mathbf{P} kann sich mit der Zeit ändern, wodurch ein Strom induziert wird, welcher proportional zu $\dot{\mathbf{P}}$ ist.
- 3) In einigen Atomen tritt ein natürlicher, mikroskopischer Strom auf, der sogenannte Magnetisierungsstrom j^{M} . Dies ist Analog zu gebundenen Ladungen in dielektrischen Medien.

Analog zum elektrischen Dipolmoment in einem Volumen kann die Magnetisierung, oder auch das Magnetische Dipolmoment pro Volumen, \mathbf{M} definiert werden. Es kann gezeigt werden, dass \mathbf{M} mit dem mikroskopischen Strom j^{M} zusammenhängt:

$$\mathbf{j}^M = \nabla \times \mathbf{M}$$

In einem stationären magnetischem Material ergibt sich also ein Gesamtstrom, welcher (ungefähr) der Summe der drei einzelnen Ströme entspricht.

$$\mathbf{j}^{\text{total}} = \mathbf{j}^{\text{true}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}$$

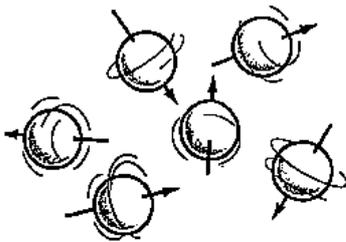
Wir definieren das makroskopische Magnetfeld \mathbf{H} als:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

Mit Hilfe des Ampère-Maxwell Gesetzes (die vierte Maxwell Gleichung) können wir schreiben:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}^{\text{true}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

wobei letztere Gleichung die zweite der beiden inhomogenen Maxwell Gleichungen in Materie ist.



Maxwell'sche Gleichungen in Materie:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho^{\text{true}}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}^{\text{true}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Heute betrachten wir diese Dinge unter einem anderen Gesichtspunkt: unsere Gleichungen im Vakuum sind einfacher und wenn wir in jedem Fall alle Ladungen anführen wollen, das auch immer ihr Ursprung sei, so sind die Gleichungen immer richtig. Wenn wir einige der Ladungen abtrennen, der Bequemlichkeit halber oder weil die Vorgänge nicht im einzelnen diskutieren wollen, so können wir unsere Gleichungen Belieben in jeder anderen bequemen Form schreiben.

Ein weiterer Punkt muß hervorgehoben werden. Wine Gleichung wie $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ist ein Versuch, eine Eigenschaft der Materie zu beschreiben. Aber die Materie ist äußerst kompliziert und eine solche Gleichung ist tatsächlich nicht richtig. Wenn beispielweise \mathbf{E} zu groß wird, ist \mathbf{D} nicht mehr proportional zu \mathbf{E} . Infolgedessen ist eine Gleichung dieser Art eine Art von Näherung, wie das Hooke'sche Gesetz. Dagegen sind unsere fundamentalen Maxwell Gleichungen in Vakuum, eine Darstellung unseres tiefsten und umfassenden Verständnisses der Elektrodynamik.

(Some) Vector calculus identities:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$$

$$\nabla \times \nabla \alpha = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{a} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$$

$$(\nabla \alpha) \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = -\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \nabla \alpha)$$

$$(\nabla \times \mathbf{a}) \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})] - \nabla \cdot [(\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}]$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a}\mathbf{b}) = (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b}$$

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{a}) = \alpha \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \nabla \alpha$$

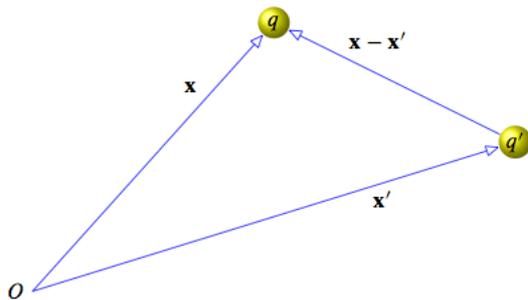
$$\nabla \times (\alpha \nabla \beta) = (\nabla \alpha) \times \nabla \beta$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b}$$

3. Empirische Grundlage der Elektrodynamik**3.1 Elektrostatik**

Die Grundlage der Elektrostatik ist das Coulombsche Gesetz, welches die Kraft zwischen zwei Punktladungen q und q' beschreibt:

$$\mathbf{F}^{\text{es}}(\mathbf{x}) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$



Das Elektrostatische Feld ist definiert als der Grenzfalle, in dem die Testladung q gegen Null strebt:

$$\mathbf{E}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}^{\text{es}}(\mathbf{x})}{q}$$

$$\mathbf{E}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$

In differentieller Darstellung nutzen wir die elektrische Ladungsdichte :

$$d\mathbf{E}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

Integration über ein Volumen ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) &= \int d\mathbf{E}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} d^3x' \rho(\mathbf{x}') \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int_{V'} d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{aligned}$$

Entsprechend dem Helmholtz-Theorem (s. Kasten auf Seite 1), ist jedes Vektorfeld vollständig erfasst sobald seine Divergenz und Rotation bekannt ist. Somit ergibt sich:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \nabla \int_{V'} d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \nabla \int_{V'} d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \mathbf{0}$$

Dies sind die zwei Grundgleichungen der Elektrostatik.

3.2 Magnetostatik

Magnetostatik ist ein subtileres Thema als die Elektrostatik, da ihre Quelle bewegte Ladung ist und nur bewegte Ladung von Magnetfeldern beeinflusst werden (s. Kreuzprodukt bei Lorentzkraft).

Experimente von Ampère und anderen zeigten, dass Leiterschleifen, welche von einem konstantem Strom durchflossen werden, eine Kraft aufeinander auswirken. Für die Kraft zwischen zwei Leiterschleifen C und C' , welche von den Strömen I und I' durchflossen werden und sich im Abstand $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ befinden gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{ms}}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \oint_C d\mathbf{l} \times \oint_{C'} d\mathbf{l}' \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &= -\frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \oint_C d\mathbf{l} \times \oint_{C'} d\mathbf{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \end{aligned}$$

was in eine symmetrische Form umgeformt werden kann:

$$\mathbf{F}^{\text{ms}}(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \oint_C d\mathbf{l} \cdot \oint_{C'} d\mathbf{l}' \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

Analog zur Elektrostatik kann das magnetostatische Feld definiert werden als:

$$\begin{aligned} d\mathbf{B}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{I \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{F}^{\text{ms}}(\mathbf{x})}{I} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\mathbf{i}'(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \end{aligned}$$

Für die Kraft gilt daher:

$$\mathbf{F}^{\text{ms}}(\mathbf{x}) = I \oint_C d\mathbf{l} \times \mathbf{B}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) = \oint_C d\mathbf{i} \times \mathbf{B}^{\text{stat}}(\mathbf{x})$$

Die Integralform des magnetostatischen Feldes ist bekannt als das *Biot-Savart Gesetz*:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) &= \int d\mathbf{B}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_{V'} d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}
 \end{aligned}$$

Wie zuvor bilden wir die Divergenz und die Rotation des magnetostatischen Feldes um dieses vollständig zu beschreiben:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \nabla \times \int_{V'} d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{B}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int_{V'} d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\
 &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} d^3x' [\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}')] \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)
 \end{aligned}$$

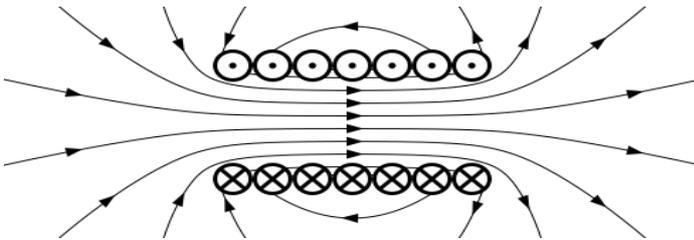
Der \mathbf{j} Term ist gleich Null im "statischem" Fall, da keine Quelle oder Senke des Stroms vorliegt. Damit ergibt sich aus den oberen zwei Gleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) = 0$$

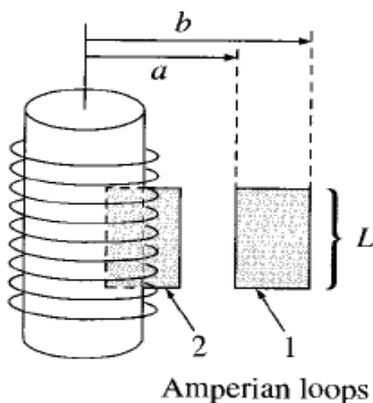
$$\nabla \times \mathbf{B}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x})$$

Beispiel: Magnetfeld im inneren und äußeren einer Spule

Hier ist ein interessantes Beispiel welches zeigt, dass außerhalb einer, von einem transversalem Strom durchflossenen, unendlich langen Spule kein Magnetfeld herrscht.



Wir folgen dem Argument von Griffiths (Introduction to Electrodynamics), Example 5.9.:



Aufgrund der Symmetrie des Problems kann gezeigt werden, dass das Feld \mathbf{B} und die Spule koaxial sind. Wir nutzen das Ampèresche Gesetz (zweite Gleichung der Magnetostatik) für die Komponente entlang der Achse. Wir zeichnen zwei Ampèresche Leiterschleifen, eine außen und die andere wie in der obigen Abbildung. Für die äußere Schleife gilt:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = [B(a) - B(b)]L = \mu_0 I_{\text{enc}} = 0,$$

$$B(a) = B(b).$$

Die Feldstärke hängt nicht vom Abstand zur Spule ab! Gleichzeitig muss die Feldstärke im unendlichen Null sein (sonst wäre die Energiedichte unendlich). Daher ist sie überall Null! Das ist ein sehr überraschendes Ergebnis der klassischen Elektrodynamik: Es gibt keine Möglichkeit um von außen festzustellen, ob eine sehr lange Spule von einem Strom durchflossen wird oder nicht!

Bitte versucht selbst die Feldstärke im inneren der Spule zu bestimmen. Für alle, die an einer formalen Lösung interessiert sind, finden Sie die Lösung zu Problem 5.44 aus dem Griffiths.

3.3 Weg zur Elektrodynamik

Einzel betrachtet sind die Elektrostatik und die Magnetostatik komplett unabhängig von einander. Es gibt keine Verbindung zwischen \mathbf{E}^{stat} und \mathbf{B}^{stat} . Nur beim betrachten von zeitabhängigen Problemen werden beide vereint und es zeigen sich die Vorteile der Formulierung als Feldtheorie.

3.3.1 Induktionsgesetz (oder Faraday-Gesetz)

Faraday entdeckte, dass eine Änderung des magnetischen Flusses durch eine Leiterschleife ein magnetisches Feld induziert, was als Elektromotorische Kraft bekannt ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \oint_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\frac{d}{dt} \Phi_m(t) \\ &= -\frac{d}{dt} \int_S d^2x \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = -\int_S d^2x \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

Hier ist Φ_m der magnetische Fluss durch die Oberfläche S , welche von der Schleife C eingeschlossen wird. Durch Anwendung des Satz von Stokes erhalten wir die dritte Maxwell Gleichung:

$$\nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(t, \mathbf{x})$$

3.3.2 Verschiebungsstrom (oder: wie Maxwell das Ampère-Gesetz reparierte)

Beim herleiten der magnetostatischen Gleichungen fanden wir:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int_{V'} d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} d^3x' [\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}')] \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \end{aligned}$$

wobei wir annahmen, dass der zweite Term gleich Null im statischen Fall ist. Im Allgemeinen ist das jedoch nicht richtig. Wir können die Kontinuitätsgleichung (Vorlesung 1, Seite 10) nutzen um zu schreiben:

$$\nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} d^3x' \frac{\partial \rho(t, \mathbf{x}')}{\partial t} \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$

Die Definition des elektrischen Feldes im elektrostatischen Fall (Seite 3 unten) lässt sich ebenfalls in einer zeitabhängigen Form schreiben:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V'} d^3x' \rho(t, \mathbf{x}') \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} d^3x' \rho(t, \mathbf{x}') \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int_{V'} d^3x' \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(t, \mathbf{x})
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich die vierte und letzte Maxwell Gleichung, die Ampère-Maxwell Gleichung der Elektrodynamik:

$$\nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \mu_0 \left(\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \right) = \mu_0 \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$$

Der $\partial \mathbf{E} / \partial t$ Term ist der berühmte Verschiebungsstrom, Maxwells inertialer Beitrag zum Feld der Elektrodynamik. Maxwell nutzte ursprünglich ein komplexes Model bestehend aus leerem Raum gefüllt mit magnetischen "Wirbeln" und elektrischen "ball-bearings" um diesen Term zu erklären. Später wendete er sich komplett von solchen mechanischen Modellen ab und nutzte lediglich die Energieerhaltung als Motivation, was wir ebenfalls getan haben. Die Entdeckung der von Maxwell vorhergesagten elektromagnetischen Wellen durch Heinrich Hertz (im Mikrowellen Bereich) überzeugte schließlich jeden.

Der Verschiebungsstrom verhält sich wie eine Stromdichte, welche durch den Raum fließt. Wie wir später sehen, werden dadurch elektromagnetische Wellen im Vakuum, sowie der Transport von Energie und Impuls durch diese, möglich.

4. Elektromagnetisches Feld und Wellen

4.1 Wellengleichungen für \mathbf{E} und \mathbf{B}

Elektromagnetische Wellen sind die Lösung der Maxwell Gleichungen im Vakuum und in Abwesenheit von Quelltermen. Um diese zu erhalten formen wir die Maxwell Gleichungen von Differenzialen erster Ordnung in Differenziale zweiter Ordnung um, indem wir $\nabla \times$ anwenden:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{0} \\
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) &= \mu_0 \nabla \times \mathbf{j}
\end{aligned}$$

Die \mathbf{E} und \mathbf{B} Terme sind gekoppelt und können durch erneutes Anwenden der Maxwell Gleichungen getrennt werden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \\
\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \mu_0 \nabla \times \mathbf{j}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Vektoridentität für $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$, erhalten wir die inhomogenen Wellengleichungen den den Quelltermen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} &= \square^2 \mathbf{E} = -\frac{\nabla \rho}{\epsilon_0} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \\
\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{B} &= \square^2 \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{j}
\end{aligned}$$

\square^2 ist der D'Alembert Operator (nur eine Kurzschreibweise).

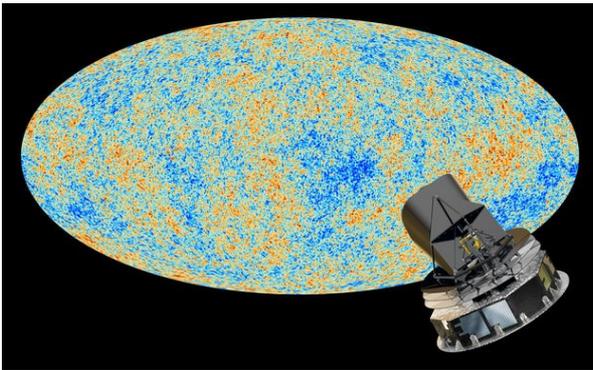
Im Vakuum, mit $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$, gelten die bekannten, homogenen Wellengleichungen:

$$\square^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\square^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

Diese Gleichungen sagen, dass sich Felder, welche von einer Quelle erzeugt werden, als Vektor-Wellen im Vakuum ausbreiten können. Sobald eine solche Welle auf ein Medium trifft kann sie Ladungen bewegen oder Ströme erzeugen, was bei Antennen oder anderen elektromagnetischen Sensoren genutzt wird.

Ein Beispiel für eine elektromagnetische Welle welche sich im Vakuum ausbreitet ist die **kosmische Mikrowellenhintergrundstrahlung**, welche manchmal als das "älteste Licht" bezeichnet wird.



Diese Strahlung wurde vor ca. 14 Milliarden Jahren erzeugt, als das Universum nur 400.000 Jahre alt war. Sie ist ein Hinweis darauf, dass das Universum zu dieser Zeit eine extrem heiÙe Mischung aus Photonen und ionisierter Materie war. Seitdem breitet sich die Hintergrundstrahlung im leeren Raum aus und hat sich bis heute kaum verändert. Aufgrund der Expansion des Universums sehen wir diese Strahlung heute im Mikrowellen Bereich (GHz Frequenzen), also im selben Bereich des elektromagnetischen Spektrums in dem Heinrich Hertz seine ersten Experimente durchführte.

4.2 Energiegleichung für elektromagnetische Felder

Nun zeigen wir, dass elektromagnetische Wellen Energie und Impuls übertragen, genau wie mechanische Wellen. Dies führt zur Energieerhaltungsgleichung für elektromagnetische Felder. Dazu betrachten wir $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ mit Hilfe der Maxwell Gleichungen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\epsilon_0}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \right) \end{aligned}$$

Analog zu elektrostatischen und magnetostatischen Feldern definieren wir die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes:

$$u^{\text{field}}(t, \mathbf{x}) = \frac{\epsilon_0}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{Jm}^{-3})$$

und den Fluss von elektromagnetischer Energie, auch Poynting Vektor genannt, welchen man sich als die Stromdichte der elektromagnetischen Energie vorstellen kann.

$$\mathbf{S}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (\text{Wm}^{-2})$$

Zusammen ergeben diese die Kontinuitätsgleichung der elektromagnetischen Energie, oder auch Energiebilanzgleichung. Man beachte den Quellterm $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ in der Energiebilanz.

$$\frac{\partial u^{\text{field}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

Der Term $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ steht für die Energie welche geladene Teilchen durch das Feld erhalten (oder verlieren), d.h. die mechanische Arbeit.

$$s = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\rho \mathbf{v}^{\text{mech}} \cdot \mathbf{E}$$

Man beachte, dass nur das elektrische Feld diese Arbeit verrichtet. Magnetfelder können nicht die Energie eines Teilchens erhöhen oder erniedrigen! Das kann man leicht aus der Definition der Arbeit, welche ein geladenes Teilchen q in den Feldern \mathbf{B} und \mathbf{E} verrichtet, ableiten:

$$dW_{\text{mech}}/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \cdot \mathbf{v} = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

Die Energiebilanzgleichung in Integralform ergibt sich zu:

$$\frac{dU^{\text{mech}}}{dt} + \frac{dU^{\text{field}}}{dt} + \oint_S d^2x \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S} = 0$$

5. Elektrodynamische Potentiale

5.1 Elektrostatistisches Skalarpotential

Im elektrostatischen Fall ist die Rotation des elektrischen Feldes gleich Null: $\nabla \times \mathbf{E}^{\text{stat}} = 0$. Daher können wir es stets als Gradient eines Skalarfeldes ausdrücken:

$$\mathbf{E}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) = -\nabla \Phi^{\text{stat}}(\mathbf{x})$$

Durch bilden der Divergenz und Anwendung des Gaußschen Gesetzes erhalten wir die Poisson-Gleichung:

$$\nabla^2 \Phi^{\text{stat}}(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \mathbf{E}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist unten zu sehen (s. Vorlesung 2, Seite 3). Diese gilt nur für den statischen Fall!

$$\Phi^{\text{stat}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Das Einführen von Potentialen hat den großen Vorteil, dass Rechnungen vereinfacht werden. Statt drei Integralen für das Vektorfeld \mathbf{E}^{stat} muss nur noch ein Integral für das Skalar Φ ausgewertet werden. Wie ist es möglich, dass eine einzige Variable so viele Informationen wie drei andere enthält (wobei \mathbf{E} ein Vektorfeld ist)? Die Antwort hängt damit zusammen, dass \mathbf{E}^{stat} ein sehr besonderes Feld ist, da eine Rotation gleich Null ist. Daher sind die drei Komponenten von \mathbf{E}^{stat} nicht unabhängig von einander. Der Potential-Formalismus macht diese Eigenschaft zu seinem entscheidenden Vorteil.

5.2 Magnetostatisches Vektorpotential

Die Divergenz des Magnetfeldes ist immer Null (keine magnetischen Monopole!), daher kann es immer als Rotation eines Vektorfeldes geschrieben werden:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Durch Anwenden des Biot-Savart-Gesetzes (s. Vorlesung 2, Seite 5) können wir die Lösung für den zeitunabhängigen Fall finden:

$$\mathbf{A}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Wir nennen $\mathbf{A}^{\text{stat}}(\mathbf{x})$ das magnetostatische Vektorpotential.

Man kann leicht sehen, dass das Skalarpotential und das Vektorpotential keine absoluten Werte haben. Nur die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten ist von physikalischer Bedeutung. Eine Änderung der Potentiale der Form:

$$\Phi^{\text{stat}}(\mathbf{x}) \mapsto \Phi^{\text{stat}' }(\mathbf{x}) = \Phi^{\text{stat}}(\mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{A}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) \mapsto \mathbf{A}^{\text{stat}' }(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{\text{stat}}(\mathbf{x}) + \mathbf{a}(\mathbf{x})$$

verändert nicht die elektrostatischen und magnetostatischen Felder \mathbf{E}^{stat} und \mathbf{B}^{stat} solange gilt:

$$\nabla \alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Die beiden oberen Gleichungen sind erfüllt, wenn gilt:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \text{Const}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \nabla \beta(\mathbf{x})$$

Diese Eigenschaft wird als Eichfreiheit der Potentiale bezeichnet. Eine allgemeinere Form dieser Bedingung wird uns im elektrodynamischen Fall begegnen, welcher als nächstes behandelt wird.

5.3 Elektrodynamische Potentiale

Wie im Fall der Felder sind das elektrostatische Potential und das magnetostatische Potential unabhängig voneinander. Nur beim betrachten von zeitlich veränderlichen Problemen werden beide abhängig voneinander.

Da es keine magnetischen Monopole gibt (soweit wir wissen), hat das Vektorpotential \mathbf{A} im elektrodynamischen Fall dieselbe Form:

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x})$$

Um das zeitabhängige Skalarpotential $\Phi(t, \mathbf{x})$ zu erhalten setzen wir die obige Relation in das Faraday-Gesetz ein:

$$\nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x})] = -\nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(t, \mathbf{x})$$

Umschreiben der Terme liefert:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \right) = \mathbf{0}$$

Der Term innerhalb der Klammern kann nun als der Gradient des elektromagnetischen Skalarpotentials verwendet werden, da seine Rotation verschwindet.

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = -\nabla \Phi(t, \mathbf{x})$$

Im zeitabhängigen Fall hängt das elektrische Feld $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ also sowohl von Φ , als auch von \mathbf{A} ab:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\nabla\Phi(t, \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$$

5.4 Eichfreiheit

Falls wir eine Funktion Λ finden könnten, welche

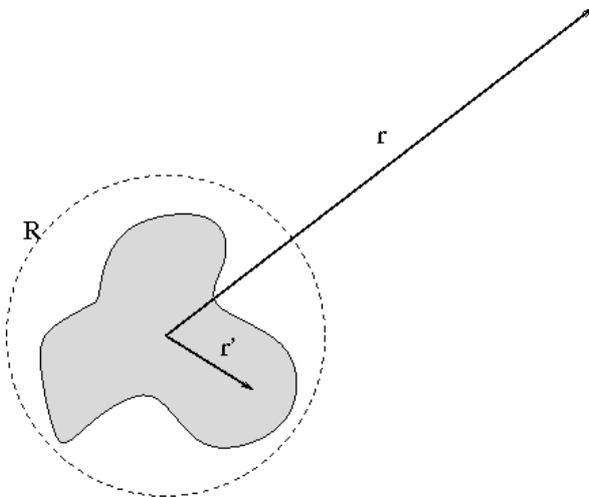
$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \\ \phi &\longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\end{aligned}$$

erfüllt, dann wären die Felder invariant unter der obigen Transformation:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \nabla\phi' - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = \nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E} \\ \mathbf{B}' &= \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}\end{aligned}$$

Diese Transformation wird Eichtransformation genannt, und die obige Eigenschaft als Eichfreiheit der Elektrodynamik bezeichnet.

5.5 Multipolentwicklung des elektrostatischen Potentials



Das Ziel der Multipolentwicklung ist die Bestimmung des Potentials einer beliebigen, lokalisierten Ladungsverteilung, welche aus einer ausreichend großen Entfernung r betrachtet wird. Wir möchten eine Taylor-Entwicklungen nutzen um folgenden Ausdruck herzuleiten:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{k,l} Q_{kl} \frac{r_k \cdot r_l}{r^5} + \dots \right).$$

Um diesen Ausdruck zu finden entwickeln wir den Nenner der Formel für das elektrostatische Potential (s. Seite 1):

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\mathbf{r}' \cdot \nabla)^n \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{r} - \mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mathbf{r}' \cdot \nabla \nabla \frac{1}{r} \cdot \mathbf{r}' + O(r'^3)\end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir die folgende Entwicklung:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{\frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{r}') d^3r'}_{\text{Monopol-}} + \underbrace{\frac{x_i}{r^3} \int x'_i \rho(\mathbf{r}') d^3r'}_{\text{Dipol-}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}') d^3r'}_{\text{Quadrupolmoment}} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{r}') d^3r' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3r' + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} \int (3\mathbf{r}'\mathbf{r}' - r'^2 E) \rho(\mathbf{r}') d^3r' + \dots \right] \end{aligned}$$

Die unterschiedlichen Terme haben verschiedene physikalische Bedeutungen. Jeder einzelne Term steigert die Genauigkeit unserer Rechnung, genau wie bei jeder anderen Reihenentwicklung.

Monopol Term

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i = \int \rho(\mathbf{r}') \cdot d^3r'$$

Der Monopol Term ist lediglich die Nettoladung, deren Anteil am Potential mit 1/r abfällt. Fall es eine Nettoladung gibt ist dies offensichtlich der dominante Term.

Dipol Term

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i = \int \rho(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}' \cdot d^3r'$$

Der Dipol-Term dominiert, wenn die Gesamtladung gleich Null ist. Das Potential des Dipols fällt mit 1/r² ab. Oft ist der Dipol der interessanteste Fall, z.B. beim Betrachten der Wechselwirkungen zwischen Molekülen, wie beispielsweise Wasser, welche keine Nettoladung, aber ein Dipolmoment tragen. Man beachte, dass der Dipol Term ein Vektor ist!

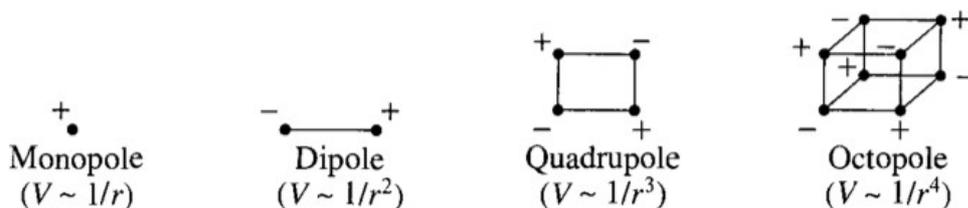
Quadrupol Term

$$Q_{kl} = \sum_{i=1}^n q_i (3r_{ik} r_{il} - (r_i)^2 \delta_{kl})$$

oder:

$$Q_{kl} = \int \rho(\mathbf{r}') \cdot (3r'_k r'_l - (r')^2 \delta_{kl}) \cdot d^3r'$$

Das Quadrupolmoment ist ein Tensor. Man kann es sich als zwei Dipole vorstellen, welche in entgegengesetzte Richtungen zeigen. Sein Beitrag fällt mit 1/r³ ab.



5.6 Legendre-Polynome und Kugelflächenfunktionen

Mathematiker des 17ten und 18ten Jahrhunderts haben verschiedene analytische Funktionen hergeleitet, welche Rechnungen, wie die Multipolentwicklung, bei sphärischer Symmetrie vereinfachen. Ein Beispiel für solche Funktionen sind die berühmten Legendre-Polynome, welche die Taylor-Entwicklung vereinfachen:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \alpha) \frac{r'^l}{r^{l+1}}$$

Es folgen einige Beispiele von Legendre-Polynomen:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

Jedoch ist es schwierig das Argument des Legendre-Polynoms, $\cos \alpha$, zu berechnen. α ist der Winkel zwischen den Vektoren \mathbf{r} und \mathbf{r}' , welcher nicht konstant ist.

Wir möchten Kugelkoordinaten für \mathbf{r} und \mathbf{r}' verwenden und um das zu erreichen nutzen wir Kugelflächenfunktionen:

$$P_l(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Kugelflächenfunktionen können zur Beschreibung jeder beliebigen Ladungsverteilung benutzt werden, solange man diese auf eine Kugel projizieren kann.

Damit nimmt das Potential für große Entfernungen folgende Form an:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{q_{lm}}{r^{l+1}}$$

Die Koeffizienten q_{lm} sind bekannt als die sphärischen Multipolmomente.

$$q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

Y_{lm}^* ist die komplexe Konjugation von Y_{lm}

$$Y_{l,-m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \cdot Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi)$$

$$q_{0,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{1}} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \sqrt{\frac{1}{4\pi}} = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}')$$

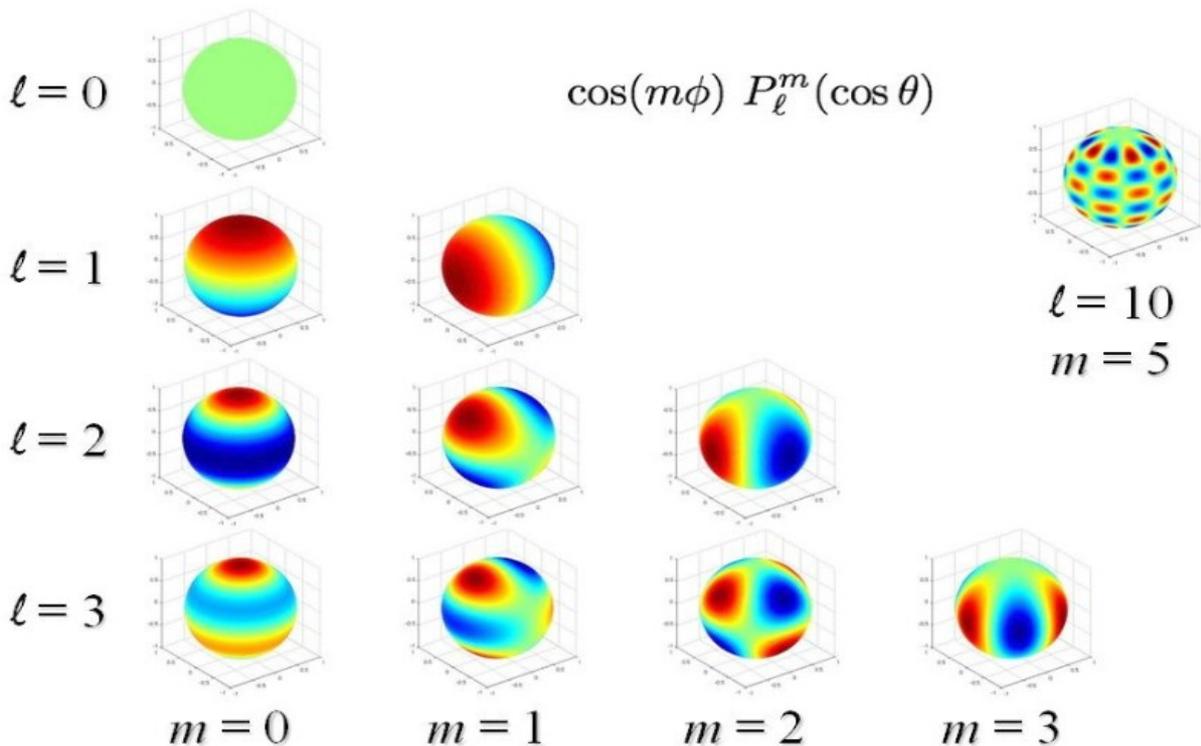
$$q_{1,1} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r' \left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \right) \sin \theta' e^{-i\varphi'} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r' \sin \theta' e^{-i\varphi'}$$

$$q_{1,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r' \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta' = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r' \cos \theta'$$

$$q_{1,-1} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r' \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta' e^{i\varphi'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r' \sin \theta' e^{i\varphi'}$$

Im Fall von azimuthaler Symmetrie ($m=0$) repräsentiert der $q_{0,0}$ Term das Monopol- und der $q_{1,0}$ Term das Dipol-Moment.

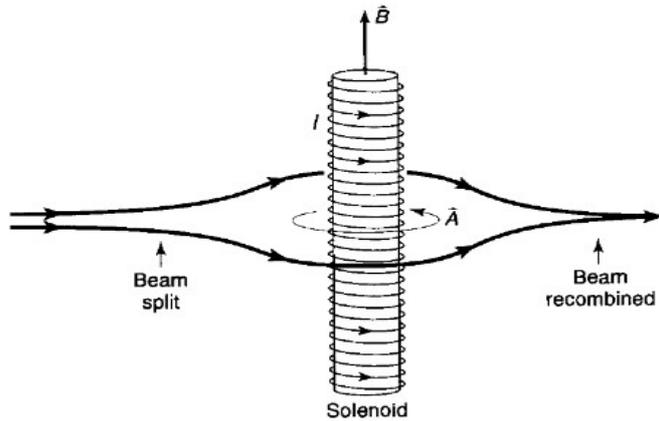
Kugelflächenfunktionen



5.7 Potentiale und Quantenmechanik

Bis zur Einführung der Quantenmechanik wurden Skalar- und Vektor-Potentiale als rein mathematische Werkzeuge betrachtet. Die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} wurden für die „wahren“ physikalischen Größen gehalten, welche die Bewegung von Teilchen beeinflussen konnten. Aber mit Hilfe der Quantenmechanik erkannte man, dass Phänomene am einfachsten über Φ und \mathbf{A} beschrieben werden konnten. Es gibt keinen einfachen Weg quantenmechanische Ausdrücke mit Hilfe von Feldern aufzuschreiben. Heute wissen wir, dass eine Diskussion über die „Existenz“ von Feldern bedeutungslos ist. Was zählt ist eine korrekte Beschreibung der Natur!

Nichtsdestotrotz haben Aharonov und Bohm 1959 ein sehr einfaches Experiment vorgeschlagen um zu zeigen, dass Φ und \mathbf{A} genauso „real“ sind wie die klassischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} (eigentlich wurde das Gedankenexperiment bereits 1949 von Ehrenberg und Siday vorgeschlagen, was jedoch niemand bemerkte!). Es gibt zwei Versionen des Experiments: Den elektrischen und den magnetischen Aharonov-Bohm-Effect. Unten werden wir uns hauptsächlich auf den magnetischen Effekt beziehen.



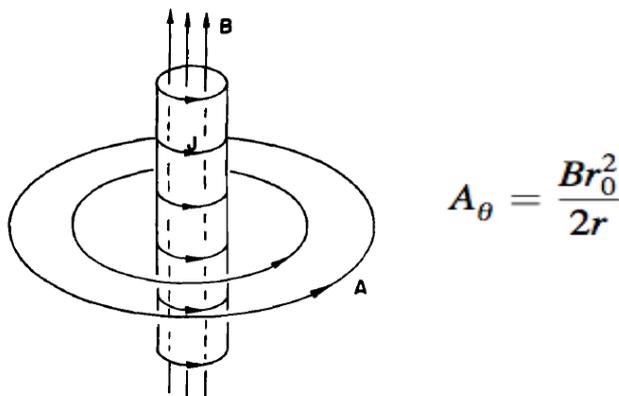
Die Idee hierbei ist Elektronen von außen eine dünne Spule (Eng.: Solenoid) passieren zu lassen und dabei zu beobachten, ob sich ihr quantenmechanischer Zustand ändert. Aus Vorlesung 2 wissen wir, dass das Magnetfeld \mathbf{B} außerhalb einer Spule gleich Null ist. Aber das Vektorpotential \mathbf{A} ist ungleich Null!

Aufgabe: Zeige, dass die Amplitude des Vektorpotentials außerhalb einer langen Spule im Abstand r von der Spulennachse geschrieben werden kann als:

$$A = Br_0^2 / 2r$$

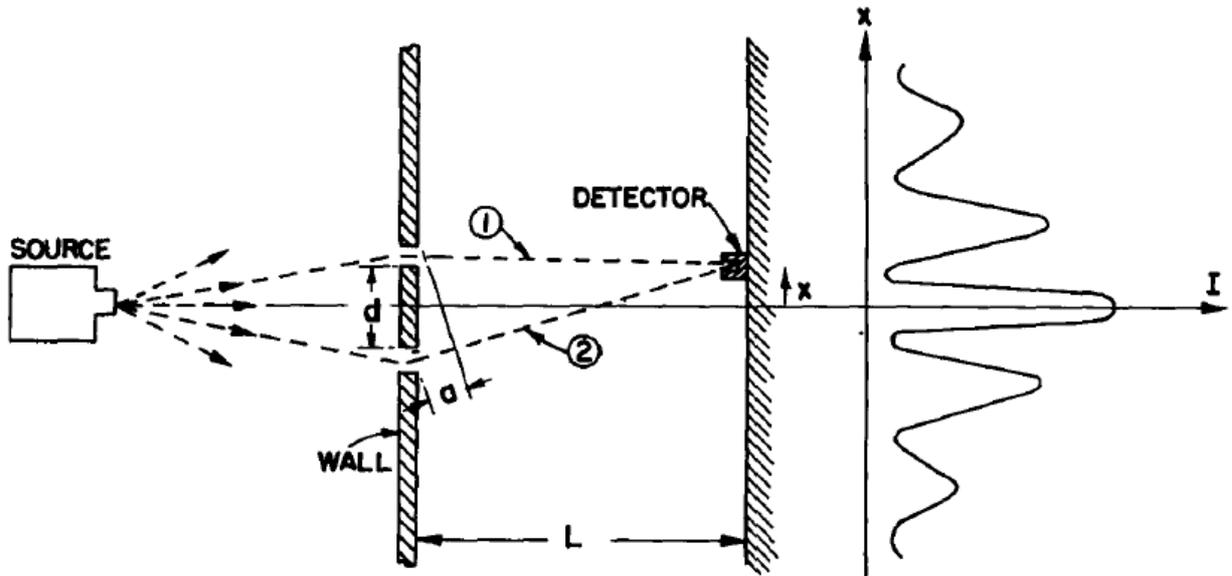
wobei r_0 der Radius der Spule ist. Die Größe Magnetfeld mal Querschnittsfläche der Spule wird magnetischer Gesamtfluss genannt: $\Phi^m = B \pi r_0^2$.

Der Beweis ist sehr einfach und folgt durch Integration von \mathbf{A} entlang einer Schleife um die Spule, wobei der Wert von \mathbf{A} nur vom Abstand r abhängt (s. Abbildung unten).



Das Experiment nutzt den Aufbau des berühmten Doppelspaltexperiments.

Elektronen welche den Doppelspalt passieren erzeugen ein Interferenzmuster, genau wie klassische Wellen.



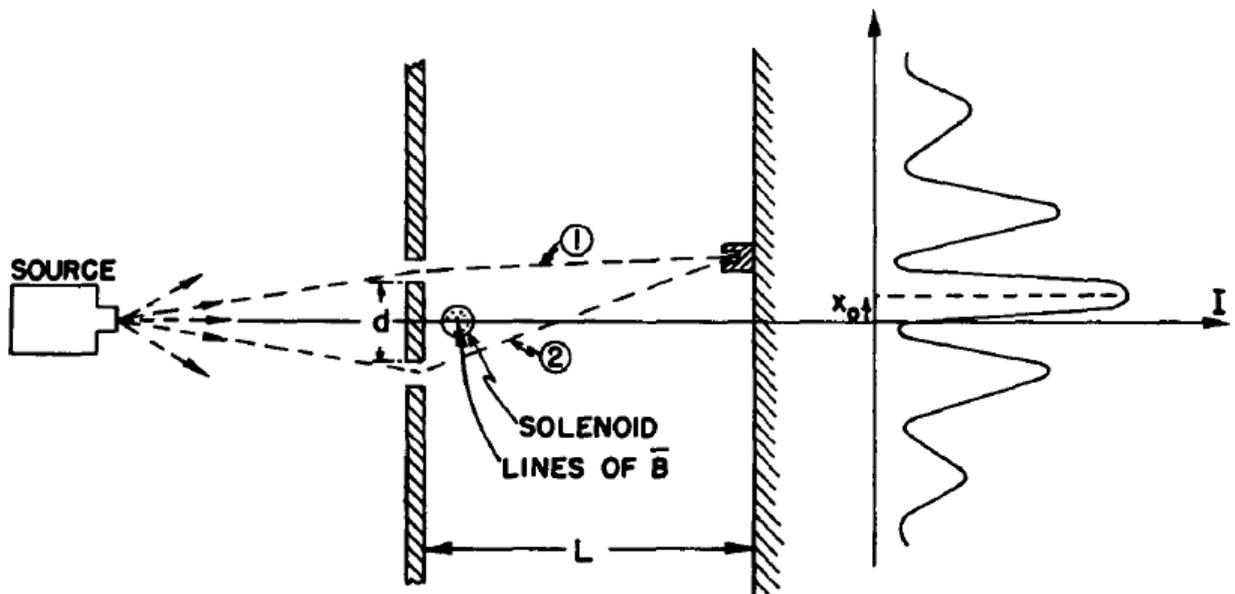
Das Muster beschreibt die Wahrscheinlichkeit der Elektronen den Detektor zu treffen. Diese Wahrscheinlichkeit wird durch die Amplitude und die Phase der Wellenfunktion des Elektrons festgelegt:

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{ig(\vec{r})} \Psi'(\vec{r}, t),$$

Hier ist $g(r)$ die Phasen-Funktion der Elektronen. Alles was wir an dieser Stelle wissen müssen ist, dass das Skalarpotential ϕ und das Vektorpotential \vec{A} die Phasen-Funktion verändern. Die Änderung durch \vec{A} ist lediglich das Integral über die Weglänge:

$$g(\vec{r}) \equiv \frac{e}{\hbar} \int_0^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

Wenn \vec{A} entlang des Weges nicht Null ist induziert es eine Phasenverschiebung der Elektronen. Dabei spielt es keine Rolle ob ein \vec{B} -Feld vorhanden ist oder nicht. Beim Doppelspaltaufbau von oben wird eine dünne Spule zwischen den beiden Spalten platziert. Wie erwartet wird eine Phasenverschiebung beobachtet (das Interferenzmuster bewegt sich)!



Wenn die Phasenverschiebung entlang des Weges 1 g_1 und entlang von Weg 2 g_2 ist, dann erzeugt die Phasendifferenz $g = g_1 - g_2$ die Änderung des Interferenzmusters.

$$g_1 - g_2 = \frac{e}{\hbar} \left[\int_{C_1} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' - \int_{C_2} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \right] = \frac{e}{\hbar} \oint_C \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \frac{e\Phi_m}{\hbar}$$

Diese von Null verschiedene Phasenänderung ist der Aharonov-Bohm-Effekt

Es gibt auch einen analogen elektrischen Effekt, bei dem sich die Phase der Elektronenwellenfunktion beim Bewegen durch das Skalarpotential ϕ ändert.

Die Phasenänderung ist dabei proportional zum Zeitintegral des Skalarpotentials.

$$g = \frac{e}{\hbar} \int_{t'=0}^{t'=t} \phi dt$$

Hierbei ist t die gesamte Zeit welche Elektronen im Gebiet des Potentials verbringen. Der Grund warum die magnetische Phasenänderung ein Wegintegral und die elektrische Phasenänderung ein Zeitintegral ist wird klar wenn wir das relativistische Viererpotential betrachten:

$$A_\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right)$$

6. Diskrete Symmetrien

Diskrete Symmetrien spielen eine fundamentale Rolle in modernen physikalischen Theorien. Die drei Hauptarten diskreter Symmetrien sind: C (Ladungskonjugation), P (Paritätsumkehr) und T (Zeitumkehr). Ihre Bedeutung folgt aus dem berühmten **CPT-Theorem**, nach dem alle physikalischen Phänomene (genauer, alle Lorentz-invarianten lokalen Quantenfeldtheorien) invariant unter kombinierter C, P und T Umkehr sein müssen. Dieses Theorem wurde unabhängig von einander von Julian Schwinger, Wolfgang Pauli und John Stewart Bell bewiesen und ist eine der Grundlagen der modernen Physik.

Wir werden nun untersuchen wie die elektromagnetische Theorie, beschrieben durch die Maxwell-Gleichungen, der CPT-Symmetrie erfüllt

C-Symmetrie (Ladungskonjugation)

Bei der Ladungskonjugation betrachten wir:

$$q \mapsto q' = -q$$

Dies beeinflusst nicht die Raum- und Zeit-kordinaten. Also ergibt sich (hier und im folgenden sind die gestrichenen Variablen die geänderten):

$$\rho \mapsto \rho' = -\rho$$

$$\mathbf{j} \mapsto \mathbf{j}' = \rho' \frac{d\mathbf{x}'}{dt'} = -\rho \frac{d\mathbf{x}'}{dt'} = -\rho \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\mathbf{j}$$

$$\nabla \mapsto \nabla' = \nabla$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mapsto \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t}$$

Einsetzen in die Maxwell-Gleichungen liefert:

$$\nabla' \cdot \mathbf{E}'(t', \mathbf{x}') = \frac{\rho'}{\epsilon_0} = \frac{(-\rho)}{\epsilon_0} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$$

$$\nabla' \times \mathbf{E}'(t', \mathbf{x}') = -\frac{\partial \mathbf{B}'(t', \mathbf{x}')}{\partial t'} = \nabla \times [-\mathbf{E}(t, \mathbf{x})] = \frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{x})}{\partial t}$$

Aus den zwei obigen Gleichungen können wir die zwei folgenden Eigenschaften des \mathbf{E} und \mathbf{B} Feldes für C-Symmetrie ableiten:

$$\mathbf{E}'(t', \mathbf{x}') = -\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$$

$$\mathbf{B}'(t', \mathbf{x}') = -\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$$

P-Symmetrie (Paritätsumkehr)

Paritätsumkehr heißt wir betrachten Reflektion in 3D

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = -\mathbf{x}$$

Daraus folgt:

$$\rho \mapsto \rho' = \rho$$

$$\mathbf{j} \mapsto \mathbf{j}' = \rho' \frac{d\mathbf{x}'}{dt'} = \rho \frac{d(-\mathbf{x})}{dt} = -\rho \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\mathbf{j}$$

$$\nabla \mapsto \nabla' = -\nabla$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mapsto \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t}$$

Erneutes nutzen der Maxwell-Gleichungen liefert:

$$\nabla' \cdot \mathbf{E}'(t', \mathbf{x}') = -\nabla \cdot \mathbf{E}'(t', -\mathbf{x}) = \frac{\rho'}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\nabla \cdot [-\mathbf{E}(t, \mathbf{x})]$$

$$\nabla' \times \mathbf{E}'(t', \mathbf{x}') = -\frac{\partial \mathbf{B}'(t', \mathbf{x}')}{\partial t'} = -\nabla \times [-\mathbf{E}(t, \mathbf{x})] = -\frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{x})}{\partial t}$$

Damit finden wir, dass sich die Felder folgendermaßen unter Paritätsumkehr verhalten:

$$\mathbf{E}(t', \mathbf{x}') = -\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$$

$$\mathbf{B}(t', \mathbf{x}') = \mathbf{B}(t, \mathbf{x})$$

Das zeigt, dass \mathbf{E} ein normales Vektorfeld ist (Polarvektor), da es sein Vorzeichen unter Räumlicher Umkehr ändert. \mathbf{B} ist jedoch eine besondere Art von Vektorfeld, ein sogenannter Pseudovektor oder Axialvektor, welcher invariant unter Paritätsumkehr ist.

T-Symmetrie (Zeitumkehr)

Die letzte Symmetrie ändert die Laufrichtung der Zeit:

$$t \mapsto t' = -t,$$

Analoges Vorgehen liefert:

$$\rho \mapsto \rho' = \rho$$

$$\mathbf{j} \mapsto \mathbf{j}' = -\mathbf{j}$$

$$\nabla \mapsto \nabla' = \nabla$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mapsto \frac{\partial}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}\nabla' \cdot \mathbf{E}'(t', \mathbf{x}') &= \nabla \cdot \mathbf{E}'(-t, \mathbf{x}) = \frac{\rho'}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \\ \nabla' \times \mathbf{E}'(t', \mathbf{x}') &= -\frac{\partial \mathbf{B}'(t', \mathbf{x}')}{\partial t'} = -\frac{\partial \mathbf{B}'(-t, \mathbf{x}')}{\partial(-t)} = \frac{\partial \mathbf{B}'(-t, \mathbf{x}')}{\partial t} \\ &= \nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{x})}{\partial t}\end{aligned}$$

Für die Zeitumkehr finden wir also:

$$\mathbf{E}'(t', \mathbf{x}') = \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$$

$$\mathbf{B}'(t', \mathbf{x}') = -\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$$

Dies zeigt, dass die Maxwell-Gleichungen und damit die Phänomene die durch diese beschrieben werden invariant unter kombinierter C-, P- und T-Transformation sind, also die CPT-Symmetrie erfüllen.

8.1 Dualsymmetrie

Es gibt eine weitere Art von diskreter Symmetrie, welche man Dualsymmetrie nennt. Betrachtet man Diracs symmetrische Darstellung der Maxwell-Gleichungen (Vorlesung 1) so findet man, dass diese invariant unter den folgenden Dual-Transformationen sind:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &\mapsto c\mathbf{B} \\ c\mathbf{B} &\mapsto -\mathbf{E} \\ c\rho^e &\mapsto \rho^m \\ \rho^m &\mapsto -c\rho^e \\ c\mathbf{j}^e &\mapsto \mathbf{j}^m \\ \mathbf{j}^m &\mapsto -c\mathbf{j}^e\end{aligned}$$

Im Fall der normalen Maxwell-Gleichungen können nur die quellfreien Gleichungen die obige Dual-Transformation erfüllen. Der obige Fall ist ein besonderer Fall ($\theta = \pi/2$) einer allgemeinen Transformation, welche als Heaviside-Larmor-Rainich-Transformation bekannt ist und mit einem θ in der oberen rechten Ecke einer Variablen gekennzeichnet wird.

$$\begin{aligned}{}^*\mathbf{E} &= \mathbf{E} \cos \theta + c\mathbf{B} \sin \theta \\ c{}^*\mathbf{B} &= -\mathbf{E} \sin \theta + c\mathbf{B} \cos \theta\end{aligned}$$

Die Dual-Transformation kann genutzt werden um einen Satz von Lösungen der Maxwell-Gleichungen aus einem anderen herzuleiten. Wir werden die Dual-Transformation in der relativistischen Formulierung der Elektrodynamik nutzen

7. Monochromatische ebene Wellen

Wie wir bereits gesehen haben, können die elektromagnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} in quellfreien Regionen in Form einer Wellengleichung vereinigt werden (s. Vorlesung 2). Sobald diese Felder erzeugt wurden erhalten sie sich eigenständig im Vakuum und breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus.

$$\begin{aligned}\square^2 \mathbf{E} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \square^2 \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Außerdem folgen im Fall der Lorenz-Eichung die elektrodynamischen Potentiale den selben Wellengleichungen wenn es keine Quellen gibt. Aber bisher haben wir keine formale Lösung für diese Wellengleichungen hergeleitet, was wir jetzt nachholen werden. Für eine detailliertere Darstellung verweise ich auf Kapitel 9 aus dem Buch von Griffiths.

Die Lösungen der Wellengleichungen können in folgender Form geschrieben werden:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

wobei \mathbf{f} ein beliebiges der beiden Felder sein kann. Einsetzen der obigen Gleichung in die Wellengleichung liefert:

$$\left(-\mathbf{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{f} = 0$$

Demnach ist \mathbf{f} eine Lösung wenn der Term in den Klammern gleich Null ist, also wenn $\omega = kc$. Das ist die Definition der Kreisfrequenz ω , ausgedrückt über den Wellenvektor k

$$k = |\mathbf{k}| = 2\pi / \lambda$$

Der Vorteil der komplexen Darstellung ist, dass es viel leichter ist mit Exponenten zu rechnen, als mit Sinus-/Kosinus-Termen. Zum Beispiel haben wir in der obigen Relation

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-i\omega t} = -i\omega e^{-i\omega t}$$

und

$$\nabla e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} e^{ik_j x_j} = i\hat{\mathbf{x}}_i k_j \delta_{ij} e^{ik_j x_j} = i\hat{\mathbf{x}}_i k_i e^{ik_j x_j} = i\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

genutzt. Wenn wir mit Exponenten rechnen können wir also einfach folgende Relationen nutzen und die entsprechenden Ausdrücke ersetzen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mapsto -i\omega$$

$$\nabla \mapsto i\mathbf{k}$$

$$\nabla \cdot \mapsto i\mathbf{k} \cdot$$

$$\nabla \times \mapsto i\mathbf{k} \times$$

Natürlich ist nur der Realteil der komplexen Funktion die physikalische Lösung, z.B.:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \Re \left[\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \right] \\ &= \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \end{aligned}$$

Die Maxwell-Gleichungen sind linear. Wir können also die allgemeine Lösung für jede Art von Welle finden, indem wir eine lineare Superposition der Exponentialfunktion bilden:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{k}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} d\mathbf{k}$$

Das ist nichts anderes als eine dreidimensionale Fourier-Transformation. Die inverse Transformation lautet:

$$\mathbf{f}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} d\mathbf{r}$$

Da die Wellengleichungen aus den Maxwell-Gleichungen im Vakuum hergeleitet wurden ist jede Lösung der Maxwell-Gleichungen auch eine Lösung der Wellengleichungen. Die umgekehrte Aussage ist nicht wahr! Das liegt daran, dass wir zusätzliche Bedingungen an \mathbf{E} und \mathbf{B} stellen und zwar das deren Divergenz gleich Null ist.

Wenn sich die Welle in z-Richtung ausbreitet erhalten wir wegen $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, dass $E_z = B_z = 0$ ist. Das bedeutet, dass die Felder orthogonal zur Ausbreitungsrichtung sind (Transversalwelle) und wegen $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ erhalten wir, dass die \mathbf{E} und \mathbf{B} Felder senkrecht zueinander stehen, woraus folgt:

$$\mathbf{B} = \frac{k}{\omega} (\hat{z} \times \mathbf{E})$$

Daraus erhalten wir die Relation $B = (k/\omega) E = (1/c) E$ für eine monochromatische ebene Welle.

Energie und Impuls

In Vorlesung Nr. 2 haben wir einen Ausdruck für die Energiedichte in elektromagnetischen Feldern hergeleitet:

$$u^{\text{field}}(t, \mathbf{x}) = \frac{\epsilon_0}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{Jm}^{-3})$$

Für eine monochromatische Welle mit $B = E/c$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} u &= \epsilon_0 E^2 \\ &= \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \end{aligned}$$

deshalb,

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2,$$

Außerdem haben wir den Energiefluss über den Poynting-Vektor definiert:

$$\mathbf{S}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (\text{Wm}^{-2})$$

woraus sich ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\ &= c \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \hat{k} \\ &= c u \hat{k} \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass der Energiefluss das Produkt der Energiedichte und der Geschwindigkeit der Welle ist, wie man es auch intuitiv erwarten würde.

7.1 Polarisation

Polarisation ist ein wichtiges Konzept elektromagnetischer Wellen, besonders im Leben eines Astronomen. Der Ausdruck „Polarisation“ charakterisiert die Richtung des elektrischen Feldvektors einer Welle als Funktion von Raum und Zeit.

Wir haben bereits die Transversalitäts- und Orthogonalitätsbedingungen für \mathbf{E} und \mathbf{B} in einer monochromatischen ebenen Welle kennengelernt, welche bedeuten:

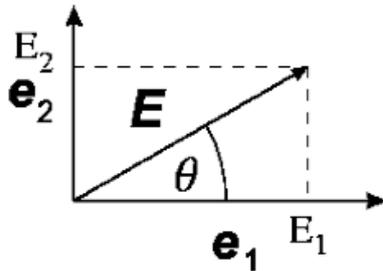
$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)); \quad \mathbf{B} = \mathbf{e}_2 B_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t))$$

mit der Bedingung:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}; \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Die drei Vektoren \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 und \mathbf{k} beschreiben ein Orthogonalsystem und eine solche Welle wird „linear polarisiert“ genannt. Mit Hilfe des Prinzips der linearen Superposition können wir das elektrische Feld im allgemeinen Fall schreiben als:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1 \tilde{E}_1 + \mathbf{e}_2 \tilde{E}_2) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)).$$



Die Amplitude kann komplex sein, mit der allgemeinen Form:

$$\tilde{E}_l = E_l \exp(i\psi_l)$$

Die Abbildung oben zeigt die reellen Komponenten der Amplituden (E_1 and E_2).

Lineare Polarisation

In diesem Fall haben beide Komponenten die Gleiche Phase $\psi_1 = \psi_2$ (oder allgemein $\psi_1 - \psi_2 = m\pi$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)). Das elektrische Feld \mathbf{E} oszilliert entlang einer geraden Linie (s. Abbildung)

$$\theta = \arctan\left(\frac{E_2}{E_1}\right); \quad E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

Zirkulare Polarisation

In diesem Fall unterscheiden sich die Phasen um ein ungerades vielfaches von $\pi/2$:

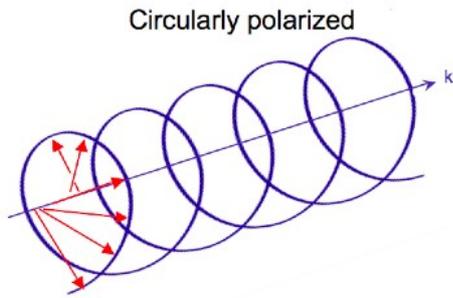
$$E_1 = E_2 \equiv E_0; \quad \psi_1 - \psi_2 = \pm \frac{\pi}{2};$$

Die Welle ist dann zirkular polarisiert. Der elektrische Feldvektor bewegt sich entlang eines Kreises senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle.

$$\mathbf{E} = E_0(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)),$$

$$E_x = E_0 \cos(kz - \omega t); \quad E_y = \mp E_0 \sin(kz - \omega t).$$

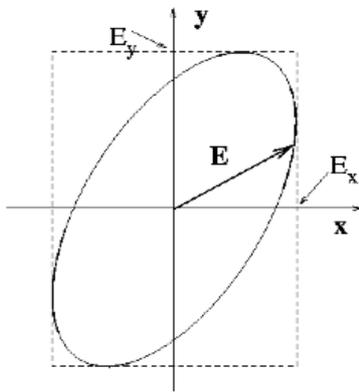
Die beiden Lösungen beschreiben Rotation entlang eines Kreises im Uhrzeigersinn und gegen den Uhrzeigersinn.



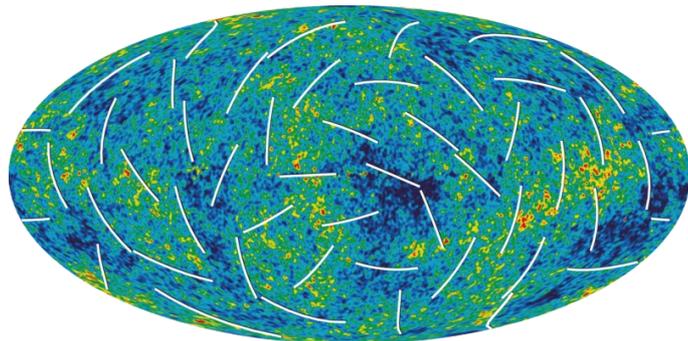
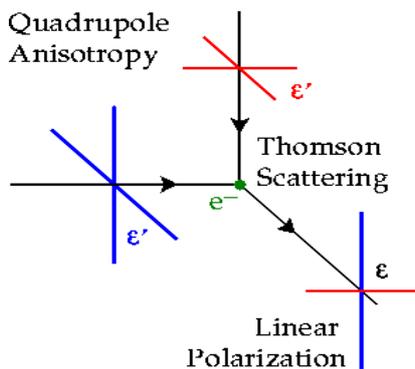
Elliptische Polarisation

Der allgemeine Fall ist natürlich elliptische Polarisation, d.h.:

$$E_1 \neq E_2; \quad \psi_1 - \psi_2 \neq 0.$$



In der Astrophysik und in der Kosmologie spielt die Polarisation von elektromagnetischer Strahlung eine wichtige Rolle. Ein häufig auftretendes Beispiel ist die Thomson-Streuung, welche die Streuung von Licht an freien Elektronen beschreibt. Da die Felder einer elektromagnetischen Welle transversal sein müssen kann ein einfallendes Feld mit einem Inklinationwinkel von 90° im Fall eines Amplitudenunterschieds (sogenannte „Quadrupol Asymmetrie“) die gestreute Welle teilweise polarisieren. Dies spielt eine wichtige Rolle beim Erforschen der kosmischen Mikrowellenhintergrundsstrahlung. Diese Strahlung ist teilweise polarisiert und erlaubt so Informationen aus der Epoche kurz nach dem Urknall zu erlangen!



8. Eichbedingungen

Wie wir bereits gesehen haben sind im allgemeinen elektrodynamischen Fall die Felder mit den Potentialen verknüpft:

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x})$$

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\nabla\Phi(t, \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$$

Einsetzen dieser zwei Gleichungen in die Maxwell-Gleichungen mit Quelltermen liefert:

$$-\nabla^2\Phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\rho(t, \mathbf{x})}{\epsilon_0}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Diese Gleichungen sind weder schön, noch sind sie einfach zu lösen! Aber sie enthalten alle Informationen der Maxwell-Gleichungen. Damit müssen wir statt sechs Gleichungen nur noch vier lösen. Eine symmetrische Form erhalten wir durch anwenden des d'Alembert Operators:

$$\square^2 = \partial^\mu \partial_\mu = \partial_\mu \partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \cdot \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

Dadurch erhalten wir die obigen Potentialgleichungen die Form:

$$\square^2 \Phi = \frac{\rho(t, \mathbf{x})}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$$

$$\square^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$$

Das schöne am Potentialformalismus ist, dass wir bis jetzt nur das Kreuzprodukt des Vektorpotentials definiert haben:

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x})$$

aber bisher nicht die Divergenz von \mathbf{A} . In der Tat ist es möglich, \mathbf{A} in beliebiger Weise zu wählen, das Ergebnis bleibt das gleiche! Diese Eigenschaft führt zur extrem nützlichen Eichinvarianz der Elektrodynamik.

Lorenz-Eichung

Wir können \mathbf{A} so wählen, dass gilt:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

Die zwei Potentialgleichungen mit Quellterm vereinfachen sich dadurch zu:

$$\square^2 \Phi = \frac{\rho(t, \mathbf{x})}{\epsilon_0}$$

$$\square^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}(t, \mathbf{x})$$

Dabei handelt es sich nur um Wellengleichungen (s. Vorlesung 2), welche jedoch einen Quellterm auf der rechten Seite besitzen. Im nächsten Kapitel („Retardierte Potentiale“) werden wir diese Gleichungen lösen um im allgemeinen Fall eine Lösung für \mathbf{A} und Φ zu finden.

Diese Eichung ist nach dem Dänischen Physiker Ludvig Valentin Lorenz (1829 – 1891) und nicht nach seinem Namensvetter Hendrik Antoon Lorentz (Lorentz-Transformation) benannt. Um Verwirrung zu vermeiden wird die Eichung auch manchmal die Lorenz-Lorentz Eichung genannt.

Coulomb-Eichung

Die Coulomb-Eichung setzt $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ gleich Null. Dadurch wird die Gleichung für das Skalarpotential besonders einfach und leicht lösbar. (Der Name ist nur eine Konvention)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho(t, \mathbf{x})}{\epsilon_0}$$

Hierbei handelt es sich nur um die zeitabhängige *Poisson-Gleichung*, welche folgende Lösung hat:

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} d^3x' \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}'(t)|}$$

Das Problem der Coulomb-Eichung ist, dass sie das Lösen der Gleichung für das Vektorpotential besonders erschwert!

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

In der letzten Vorlesung haben wir die allgemeine Eichbedingung besprochen unter der sich das Ergebnis nicht ändert wenn man folgende Transformation auf die Potentiale anwendet:

$$\begin{aligned} \Phi(t, \mathbf{x}) &\mapsto \Phi'(t, \mathbf{x}) = \Phi(t, \mathbf{x}) - \frac{\partial \Gamma(t, \mathbf{x})}{\partial t} \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) &\mapsto \mathbf{A}'(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) + \nabla \Gamma(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

wobei $\Gamma(t, \mathbf{x})$ eine beliebige glatte (unendlich oft differenzierbare) Funktion ist, welche *Eichfunktion* genannt wird.

9. Retardierte Potentiale

Das allgemeine Problem ein elektrostatisches Potential im statischen Fall zu bestimmen haben wir in Form der Multipolentwicklung gelöst. Ähnliche Ausdrücke können auch für das magnetostatische Potential gefunden werden. Aber für zeitlich veränderliche Ladungen und Ströme werden die Lösungen deutlich komplizierter. Das Ziel der heutigen Vorlesung ist das Finden einer allgemeiner Lösungen für elektromagnetische Potentiale, welche als *retardierte Potentiale* bekannt sind.

Man könnte folgendes annehmen: Falls $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ stets wahr ist, dann erhalten wir hierdurch schon den zeitabhängigen Fall! Man sollte sich jedoch daran erinnern, dass die Divergenz eines Vektorfeldes dieses nicht vollständig definiert. Man benötigt zusätzlich seine Rotation und die Rotation von \mathbf{E} enthält die Zeitableitung des Magnetfeldes (Faraday-Gesetz), wodurch die Separation von \mathbf{E} und \mathbf{B} erschwert wird. Die Lösung ist einfacher wenn man den Potential-Formalismus verwendet.

Wir möchten nun die inhomogene (d.h. mit Quelltermen) Wellengleichung, welche wir durch anwenden der Lorenz-Eichung erhalten haben, lösen

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

Diese vier inhomogenen Wellengleichung haben die folgende Form:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(t, \mathbf{x}) = -s(t, \mathbf{x})$$

Dabei steht (t, \mathbf{x}) für irgendeine Potentialkomponente deren Lösung wir suchen und $s(t, \mathbf{x})$ ist die Quellkomponente.

Die Lösung erhalten wir am einfachsten, indem wir die Wellengleichung im Fourier Raum aufschreiben. Dort werden die Zeitableitungen zu einfachen Produkttermen. Da das Potential und der Quellterm s glatte Funktionen der Zeit sind können wir stets ihre Fouriertransformierte finden:

$$s_\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt s(t, \mathbf{x}) e^{i\omega t}$$

$$\Psi_\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \Psi(t, \mathbf{x}) e^{i\omega t}$$

Einsetzen der Fouriertransformierten in die inhomogene Wellengleichung liefert:

$$\nabla^2 \Psi_\omega(\mathbf{x}) + k^2 \Psi_\omega(\mathbf{x}) = -s_\omega(\mathbf{x})$$

Hier ist $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl und λ ist die Wellenlänge im Vakuum.

$$\omega = v/2\pi = ck$$

Im Fall $k=0$ reduziert sich die obige Wellengleichung zur Poisson-Gleichung. Ähnlich wie bei der Lösung der Poisson-Gleichung liegt die Lösung der obigen Wellengleichung in Form von Green-Funktionen $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ vor:

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = -\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon_0}$$

Differentialoperator L	Greensche Funktion G	Anwendungsbeispiel
$\partial_t + \gamma$	$\theta(t)e^{-\gamma t}$	konventionelle Langevin-Gleichung
$(\partial_t + \gamma)^2$	$\theta(t)te^{-\gamma t}$	
$\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2$	$\theta(t)e^{-\gamma t} \frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$ mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$	eindimensionaler gedämpfter harmonischer Oszillator
$\Delta_{2D} = \partial_x^2 + \partial_y^2$	$\frac{1}{2\pi} \ln \rho$	
$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$	$-\frac{1}{4\pi r}$	Poisson-Gleichung
Helmholtz-Operator $\Delta + k^2$	$\frac{-e^{-ikr}}{4\pi r}$	stationäre Schrödinger-Gleichung
D'Alembertoperator $\square = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta$	$\frac{\delta(t - \frac{r}{c})}{4\pi r}$	Wellengleichung

Tabelle von Green-Funktionen aus Wikipedia

Green-Funktionen sind eine allgemeine Klasse von Lösungen von Wellengleichungen wenn die Quelle nur ein einziger Punkt ist. Unsere inhomogene Wellengleichung kann daher geschrieben werden als:

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + k^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

Das Potential ist dann die Superposition aller solcher Lösungen über den Quellterm.

$$\Psi_\omega(\mathbf{x}) = \int_{V'} d^3x' s_\omega(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

Die Wellengleichung lässt sich noch weiter vereinfachen, da nur eine radiale Symmetrie vorliegt, d.h. die Lösung hängt nicht von der Richtung von $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ab. Für $r > 0$ gilt:

$$\frac{d^2}{dr^2}(rG) + k^2(rG) = 0$$

was folgende, wohlbekannte allgemeine Lösung hat:

$$G = C_+ \frac{e^{ikr}}{r} + C_- \frac{e^{-ikr}}{r} \equiv C_+ \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + C_- \frac{e^{-ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

Daher hat das Potential in der $r > 0$ - Domäne die folgende Lösung:

$$\Psi_\omega(\mathbf{x}) = C_+ \int_{V'} d^3x' s_\omega(\mathbf{x}') \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + C_- \int_{V'} d^3x' s_\omega(\mathbf{x}') \frac{e^{-ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

Um die Lösungen in der Zeitdomäne zu erhalten wenden wir die inverse Fourier-Transformation an:

$$\begin{aligned} \Psi(t, \mathbf{x}) = & C_+ \int_{V'} d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega s_\omega(\mathbf{x}') \frac{\exp\left[-i\omega\left(t - \frac{k|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{\omega}\right)\right]}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\ & + C_- \int_{V'} d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega s_\omega(\mathbf{x}') \frac{\exp\left[-i\omega\left(t + \frac{k|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{\omega}\right)\right]}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \end{aligned}$$

Wie definieren die retardierte Zeit (t_{ret}) und die avancierte Zeit (t_{adv}) auf folgende Art:

$$\begin{aligned} t'_{\text{ret}} = t'_{\text{ret}}(t, |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) &= t - \frac{k|\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t'_{\text{ret}})|}{\omega} = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t'_{\text{ret}})|}{c} \\ t'_{\text{adv}} = t'_{\text{adv}}(t, |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) &= t + \frac{k|\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t'_{\text{adv}})|}{\omega} = t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t'_{\text{adv}})|}{c} \end{aligned}$$

Damit hat die allgemeine Lösung der Potential-Terme die endgültige Form:

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = C_+ \int_{V'} d^3x' \frac{f(t'_{\text{ret}}, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + C_- \int_{V'} d^3x' \frac{f(t'_{\text{adv}}, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Interessant ist, dass sowohl die retardierten als auch die avancierten Lösungen mathematisch richtig sind, obwohl das Konzept der avancierten Lösung das Prinzip der Kausalität (d.h. Ursache vor Wirkung) verletzt. Nichtsdestotrotz haben Wissenschaftler, einschließlich Feynman, versucht eine allgemeine Theorie der Elektrodynamik auf Grundlage von retardierten und avancierten Potentialen zu formulieren.

Wir können zeigen, dass $C_+ + C_- = 1 / (4\pi)$ im Grenzfall $r \rightarrow 0$ gilt (s. EMFT Buch). Da die avancierten Potentiale keine physikalische Bedeutung haben bleibt:

$$C_+ = 1 / (4\pi).$$

Die endgültige Lösung für elektrodynamische Potentiale im freien Raum ist:

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} d^3x' \frac{\rho(t'_{\text{ret}}, \mathbf{x}'(t'_{\text{ret}}))}{|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}'(t'_{\text{ret}})|}$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{V'} d^3x' \frac{\mathbf{j}(t'_{\text{ret}}, \mathbf{x}'(t'_{\text{ret}}))}{|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}'(t'_{\text{ret}})|}$$

Diese haben dieselbe Form wie die bereits besprochenen Lösungen im statischen Fall (s. Vorlesung 2), aber nutzen nun zeitabhängige Quell-Koordinaten in Form der retardierten Zeit.

Retardierte Felder

Wir haben den Potential-Formalismus genutzt da die allgemeinen Ausdrücke für Felder im zeitabhängigen Fall komplizierter sind. Daher werden die entsprechenden Lösungen hier nur kurz ohne Herleitung gezeigt. Diese sind bekannt als die Jefimenk-Gleichungen bekannt, welcher sie im Jahr 1966 (!) fand. Jedoch tat Schott das gleiche viel früher (1912) in der Fourierdomäne.

Wir definieren $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ und $t_{\text{ret}} = t - R/c$. Damit lauten die Ausdrücke für die Felder:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \left[\frac{\rho_{\text{ret}} \mathbf{R}}{R^3} + \frac{\mathbf{R}}{cR^2} \frac{\partial \rho_{\text{ret}}}{\partial t} - \frac{1}{c^2 R} \frac{\partial \mathbf{j}_{\text{ret}}}{\partial t} \right]$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left[\frac{\mathbf{j}_{\text{ret}}}{R^3} + \frac{1}{c^2 R^2} \frac{\partial \mathbf{j}_{\text{ret}}}{\partial t} \right] \times \mathbf{R}$$

10. Relativistische Elektrodynamik

In dieser Vorlesung werden wir die relativistische Formulierung der Elektrodynamik einführen. Im Gegensatz zum Newtonschen Gesetz sind die Maxwell-Gleichungen von Natur aus Lorentz-invariant, was beim betrachten ihrer kovarianten (d.h. vom Bezugssystem unabhängigen) Formulierung deutlich wird.

Wir haben zwei Ziele: 1) die kovariante Form der Maxwell-Gleichungen herleiten und 2) die Potentiale für eine bewegte Ladung herleiten. Das zweite Problem wird auch Liénard-Wiechert-Potential genannt und ist in der kovarianten Formulierung leichter zu lösen.

Zunächst fangen wir mit einem Überblick über die spezielle Relativitätstheorie und die kovariante klassische Mechanik an:

Die Lorentz-Transformation

Wir betrachten zwei Inertialsysteme S und S' , wobei sich das gestrichelte System entlang der x -Richtung mit Geschwindigkeit v bewegt. In diesem Fall lautet die Lorentz-Transformation:

$$ct' = \gamma(ct - x\beta)$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

und es gilt $y = y'$, sowie $z = z'$. Solche Lorentz-Transformationen verändern nicht die folgende Größe:

$$c^2 t'^2 - x'^2 = \gamma^2 (c^2 t^2 - 2xc\beta t + x^2 \beta^2 - x^2 + 2xvt - v^2 t^2)$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[c^2 t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - x^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \right]$$

$$= c^2 t^2 - x^2$$

oder allgemein:

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

Jetzt werden wir das vierdimensionale Gegenstück zum Positionsvektor \mathbf{x} definieren:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \equiv (ct, \mathbf{x})$$

Dieser Vektor befindet sich in einem reellen, vierdimensionalen Raum, welcher Riemannscher Raum R^4 genannt wird. In diesem können wir die „Länge“ und das „Skalarprodukt“ der Vektoren definieren. Der Fundamentaltensor eines solchen Raumes ist der Metrik-Tensor g .

Mit Hilfe des Metrik-Tensors kann man die kovariante und kontravariante Form der Vierervektoren, sowie deren Skalarprodukt, definieren:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

$$g_{\mu\nu} x^\nu x^\mu = x_\mu x^\mu$$

Um die kovariante Form der Lorentz-Transformation (spezielle Relativitätstheorie) aufzuschreiben nutzen wir eine vereinfachte Version des Riemannschen Raumes, genannt L^4 . Hier bezeichnen wir den Metrik-Tensor als :

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mit dieser Metrik ist der Wechsel von kovarianten zu kontravarianten Vektoren trivial, genau wie ihr Skalarprodukt:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix}$$

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\mathbf{x})$$

$$x_\mu x^\mu = (ct, \mathbf{x}) \cdot (ct, -\mathbf{x}) = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Der obige Ausdruck ist der Abstand zwischen zwei Raum-Zeit „Ereignissen“ und ein Viererskalar (invariant). Wir können diese Entfernung als Differential schreiben:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu = dx_\mu dx^\mu = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

$$\begin{aligned} ds &= c dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt} \right)^2 \right]} \\ &= c dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} [(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2]} = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= c dt \sqrt{1 - \beta^2} = c \frac{dt}{\gamma} = c d\tau \end{aligned}$$

Hierbei ist ds das invariante Linienelement und $d\tau = dt/\gamma$ ist die sog. Eigenzeit.

Jetzt können wir die Lorentz-Transformationsmatrix einführen:

$$(\Lambda^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit kann die Transformation von x^ν zu x'^μ geschrieben werden als:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Es sei darauf hingewiesen, dass zwei aufeinanderfolgende Lorentz-Transformationen mit den Geschwindigkeiten β_1 und β_2 zu einer Transformation mit der Geschwindigkeit

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}$$

zusammengefasst werden können. Damit bilden Lorentz-Transformationen eine geschlossene algebraische Struktur samt zweistelliger Verknüpfung (Multiplikation), welche assoziativ ist. Solche Strukturen sind auch als mathematische Gruppen bekannt.

Jede Größe welche aus vier reellen Zahlen besteht und wie x^μ transformiert kann als Vierervektor bezeichnet werden.

$$a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$$

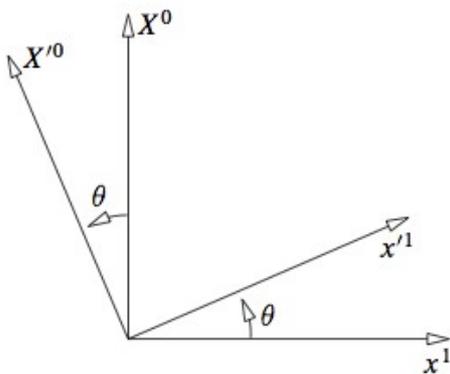
$$\eta_{\mu\nu} a^\nu(x^\kappa) b^\mu(x^\kappa) = (a^0, -\mathbf{a}) \cdot (b^0, \mathbf{b}) = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

Der Minkowski-Raum

Kurz nach der Formulierung der Speziellen Relativitätstheorie inklusive Lorentz-Transformation zeigte Herman Minkowski, dass diese Transformationen also „Rotation“ eines vierdimensionalen euklidischen Raumes betrachtet werden können. Dadurch ergibt sich eine interessante Sichtweise auf Formulierung der speziellen Relativitätstheorie.

Wir haben erwähnt, dass x ein „Ereignis“ als etwas beschreibt was am Zeitpunkt $t=x^0/c$ an der Stelle (x^1, x^2, x^3) stattfindet. Eine Weltlinie ist die Bahn des Ereignisses durch die Raumzeit.

Wir führen nun Koordinaten in einem vierdimensionalen Raum ein:



$$X^0 = ix^0 = ict$$

$$X^1 = x^1$$

$$X^2 = x^2$$

$$X^3 = x^3$$

$$dS = ids$$

Damit ändert sich unsere vorherige Definition des Linienelements zu:

$$dS^2 = (dX^0)^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2$$

Ein auf diese Art konstruierter vierdimensionaler Raum wird Minkowski-Raum (M^4) genannt. Genau wie eine normale Rotation in einem dreidimensionalen euklidischen Raum das Linienelement nicht ändert, ändert auch eine vierdimensionale „Rotation“ das Linienelement nicht. Der Einfachheit halber nehmen wir erneut an, dass sich nur die x und t Koordinaten ändern und y sowie z konstant bleiben. Dann ist die Rotation der zwei orthogonalen Achsen X^0 und X^1 (s. Zeichnung) um den Winkel θ gegeben durch:

$$X'^0 = -x^1 \sin \theta + X^0 \cos \theta$$

$$x'^1 = x^1 \cos \theta + X^0 \sin \theta$$

Wenn wir den Winkel $\varphi = -i\theta$ einführen kann die obige Transformation in folgende Form gebracht werden:

$$ct' = -x \sinh \varphi + ct \cosh \varphi$$

$$x' = x \cosh \varphi - ct \sinh \varphi$$

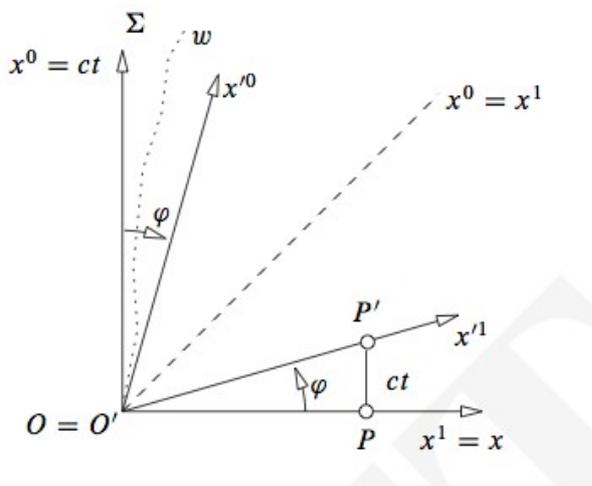
Im Vergleich mit den ursprünglichen Gleichungen der Lorentz-Transformation fällt auf, dass die Lorentz-Transformation als normale Rotation in einem vierdimensionalen euklidischen Raum aufgefasst werden kann, wenn wir schreiben:

$$\sinh \varphi = \gamma \beta$$

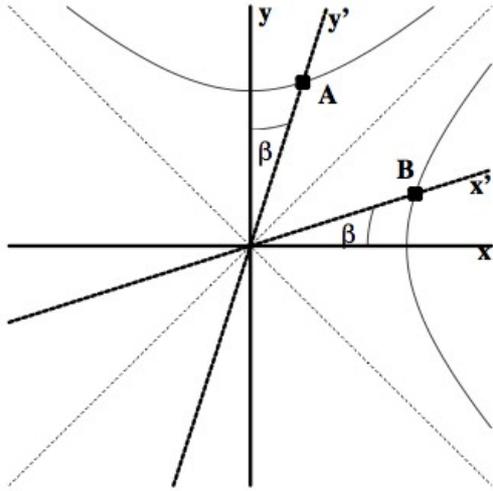
$$\cosh \varphi = \gamma$$

$$\tanh \varphi = \beta$$

Die Situation ist in der Abbildung unten dargestellt.



Eine solche Rotation ist in der Mathematik auch bekannt als „hyperbolische Rotation“ oder „squeeze mapping“. Die Nutzung von „ict“, obwohl anschaulich, erschwert den Übergang zur allgemein Relativitätstheorie.



10.1 Kovariante klassische Mechanik

Die Vierergeschwindigkeit und der Viererimpuls können mit Hilfe der differentiellen Längenelements ds und der Eigenzeit d definiert werden:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(c, \mathbf{v}) = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = (u^0, \mathbf{u})$$

$$p^\mu = m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau} = m_0 \gamma(c, \mathbf{v}) = \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = (p^0, \mathbf{p})$$

Daraus ergibt sich:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Die nullte Komponente des Viererimpulses (Zeit) ist also:

$$cp^0 = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2$$

und die „Länge“ des Viererimpulses, welche ein Viererskalar ist, lautet:

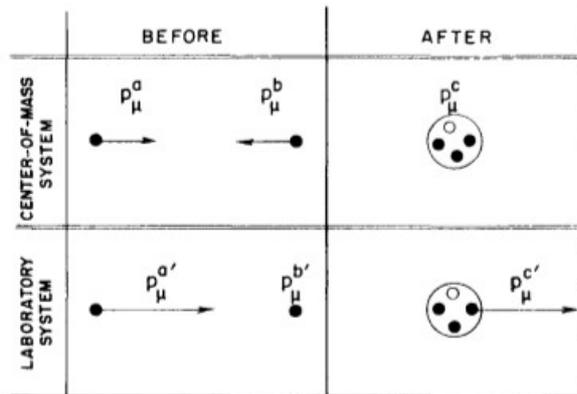
$$\begin{aligned} cp_\mu cp^\mu &= c^2 \eta_{\mu\nu} p^\nu p^\mu = c^2 [(p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2] \\ &= (E, -c\mathbf{p}) \cdot (E, c\mathbf{p}) = E^2 - c^2 \mathbf{p}^2 \\ &= \frac{(m_0 c^2)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = (m_0 c^2)^2 \end{aligned}$$

Da die obige Größe in jedem Bezugssystem eine Viererskalar ist erhalten wir im Ruhesystem ($\mathbf{p} = 0$) Einsteins berühmte Formel $E = m_0 c^2$. Daraus folgt auch, dass der Viererimpuls p nur Null sein kann wenn ein Teilchen keine Ruhemasse besitzt (z.B. Photonen)

Beispiel:

Mit Hilfe der Definition des Vierpotentials ist es extrem einfach die Energie zu berechnen, welche benötigt wird um z.B. ein Antiproton zu erzeugen. Schaffst du diese Übersichtsrechnung?

Die Antwort ist ca. 6 GeV. Diese Energie wurde erstmals am Bevatron in Berkeley erreicht, wo das Antiproton 1955 entdeckt wurde. Dafür gab es 1959 den Nobelpreis.



10.2 Kovariante Elektrodynamik

Der Viererstrom ist Definiert als:

$$j^\mu = \rho_0 \frac{dx^\mu}{d\tau} = \rho_0 u^\mu = \rho_0 \gamma(c, \mathbf{v}) = (\rho c, \rho \mathbf{v})$$

Hierbei ist ρ_0 die Ladungsdichte im Ruhesystem und $\rho = \gamma \rho_0$

Wir führen nun das Viererpotential ein:

$$A^\mu = \left(\frac{\Phi}{c}, \mathbf{A} \right)$$

Ebenfalls gibt es eine kovariante Form des Ableitungsoperators:

$$\partial_\mu \equiv \partial / \partial x^\mu = (\partial / \partial ct, \partial / \partial \mathbf{x})$$

Damit können wir den D'Alembertoperator als Skalarprodukt zweier Ableitungsoperatoren schreiben:

$$\square^2 = \partial^\mu \partial_\mu = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

Daraus erkennt man sofort, dass die homogenen Wellengleichungen Lorentz-invariant sind:

$$\square^2 f(t, \mathbf{x}) = 0$$

inhomogene Wellengleichungen

$$\square^2 A^\mu = \mu_0 j^\mu$$

Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

an event	$x^\mu = (ct, \mathbf{x}),$
4-velocity	$u^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}),$
4-momentum	$p^\mu = (E/c, \mathbf{p}),$
wave 4-vector	$k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k}),$
4-current density	$J^\mu = (\rho c, \mathbf{j}),$
4-potential	$A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A}),$
4-force	$F^\mu = (\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}/c, \gamma \mathbf{F})$

Elektromagnetischer Feldstärketensor

Wir wissen aus Vorlesung Nr. 3, dass die elektromagnetischen Potentiale folgendermaßen definiert werden können:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

in Komponentendarstellung ergibt sich:

$$B_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

$$E_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} = -\partial_i \Phi - \partial_t A_i$$

(Die beiden obigen Relationen zeigen deutlich warum \mathbf{B} ein Axialvektor (Pseudovektor) und \mathbf{E} ein Polarvektor („normaler“ Vektor) ist.)

Unter Nutzung der kovarianten Form des Viererpotentials

$$A^\mu = \left(\frac{\Phi}{c}, \mathbf{A} \right)$$

können wir den antisymmetrischen Vierertensor folgendermaßen definieren:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Dies Ergebnis ist bekannt als der elektromagnetische Feldstärketensor. Wie man sofort erkennt handelt es sich um eine Art „vierdimensionale Rotation“ des Viererpotentials A .

In der Matrix-Notation wird der kontravariante Feldstärketensor folgendermaßen dargestellt:

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Den kovarianten Feldstärketensor erhält auf dem üblichen Weg durch Index Manipulation.

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda}F^{\kappa\lambda} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Der kovariante Feldstärketensor kann also aus dem kontravarianten mit Hilfe der Transformation $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}$ gewonnen werden.

Man kann die folgende Identität, manchmal Jacobi-Identität genannt, beweisen.

$$\partial_\kappa F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\kappa} + \partial_\nu F_{\kappa\mu} = 0$$

10.3 Kovariante Maxwell-Gleichungen

Die beiden Maxwell-Gleichungen mit Quelltermen können geschrieben werden als:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

Die Vektordarstellung kann einfach gefunden werden, indem man die obigen Gleichungen in Komponentenform aufschreibt. Wenn wir $\nu = 0$ setzen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{30}}{\partial x^3} &= 0 + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{c} \nabla \cdot \mathbf{E} = \mu_0 j^0 = \mu_0 c \rho \end{aligned}$$

Das ist nichts anderes als das Gauß-Gesetz. Und wenn wir $\nu = 1$ setzen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^3} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + 0 + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ &= \mu_0 j^1 = \mu_0 \rho v_x \end{aligned}$$

oder

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \mu_0 j_x$$

was nichts anderes als die x-Komponente der Ampère-Maxwell-Gleichung ist.

$$(\nabla \times \mathbf{B})_x = \mu_0 j_x + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Im Fall der quellfreien Gleichungen benötigen wir die Dualform des elektromagnetischen Feldstärketensors. In Vorlesung Nr. 5 haben wir die Dual-Transformation diskutiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\rightarrow c\mathbf{B} \\ \mathbf{B} &\rightarrow -\mathbf{E}/c \end{aligned}$$

Der duale Feldstärketensor ist formal über den Levi-Civita-Tensor definiert:

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} = -*F^{\nu\mu}$$

$$(*F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix}$$

Dann können die quellfreien Maxwell-Gleichungen in folgender Form geschrieben werden:

$$\partial_\mu *F^{\mu\nu} = 0$$

woraus dann folgt:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Maxwell-Gleichungen in allen Inertialsystemen identisch sind, was in Einsteins erstem Postulat der Relativität vorausgesetzt wird.

10.4 Die Liénard-Wiechert-Potentiale

Das Erlernen der kovarianten Formulierung der Elektrodynamik erlaubt uns Ausdrücke für elektromagnetische Felder von beliebigen Ladungsverteilungen im zeitabhängigen Fall herzuleiten (Die Lösungen zu den Potentialen haben wir bereits in Vorlesung Nr. 4 in Form der retardierten Potentiale kennengelernt). Für Punktladungen mit beliebiger Bewegung sind diese Lösung bekannt als die Liénard-Wiechert-Potentiale bzw. -Felder.

Ziel des Problems ist eine Lösung der inhomogenen Wellengleichungen (deren kovariante Formulierung wir oben kennengelernt haben) für eine Punktladung zu finden.

$$\begin{aligned} \square^2 \Phi &= \frac{\rho(t, \mathbf{x})}{\epsilon_0} \\ \square^2 \mathbf{A} &= \mu_0 \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

Wir betrachten eine Ladung q , welche sich am Quellpunkt

$$x'^{\mu} \equiv (x'^0 = ct', x'^1, x'^2, x'^3)$$

befindet. Wir möchten das Potential am Feldpunkt

$$x^{\mu} = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$$

messen. Im Ruhesystem ist die Lösung einfach:

$$(A^\mu)_0 = \left(\frac{\Phi}{c}, \mathbf{A} \right)_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} = \left(\frac{q'}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|_0}, \mathbf{0} \right)$$

Wir führen nun den relativen Orts-Vierervektor zwischen dem Quellpunkt und dem Feldpunkt ein

$$R^\mu = x^\mu - x'^\mu = (c(t - t'), \mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

Wir können zeigen, dass gilt:

$$R^\mu R_\mu = 0$$

da

$$R^\mu R_\mu = (c(t - t'), \mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot (c(t - t'), -(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) = c^2(t - t')^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2$$

und

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = c(t - t')$$

Nun bilden wir das Skalarprodukt von R mit dem Geschwindigkeits-Vierervektor u^μ . Das Skalarprodukt $R_\mu u^\mu$ gilt in jedem Inertialsystem! Seine Lösung finden wir im Ruhesystem:

$$(u^\mu)_0 = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} = (c, \mathbf{0})$$

$$(R^\mu)_0 = (|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x} - \mathbf{x}')_0 = (|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|_0, (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_0)$$

woraus sich ergibt:

$$\begin{aligned} u^\mu R_\mu &= (u^\mu R_\mu)_0 = (u^\mu)_0 (R_\mu)_0 \\ &= (c, \mathbf{0}) \cdot (|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|_0, -(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_0) = c |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|_0 \end{aligned}$$

Damit haben wir eine kovariante Form des Potentials, welche im Ruhesystem die korrekte Lösung liefert.

$$A^\mu = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{u^\mu}{u^\nu R_\nu}$$

Da dies eine Tensorgleichung mit korrekten Transformationseigenschaften ist (Kovarianz) muss diese Lösung in allen Inertialsystemen gelten!

Um die obige Gleichung in eine vertrautere Form zu bringen nutzen wir die folgenden Definitionen:

$$\boldsymbol{\beta} = \beta \hat{\mathbf{v}} \stackrel{\text{def}}{\equiv} \frac{\mathbf{v}}{c}$$

$$s \stackrel{\text{def}}{\equiv} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{c} \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - \boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

und halten außerdem fest, dass das Skalarprodukt R u im bewegten System geschrieben werden kann als:

$$u^\nu R_\nu = \gamma(c, \mathbf{v}) \cdot (|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, -(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) = \gamma (c |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}'))$$

Damit können wir die obige Lösung für A für den allgemeinen Fall schreiben:

$$A^\mu(x^\kappa) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{cs}, \frac{\mathbf{v}}{c^2s} \right) = \left(\frac{\Phi}{c}, \mathbf{A} \right)$$

Aufschreiben der obigen Gleichungen im gewöhnlichen dreidimensionalen Fall liefert die bekannten Liénard-Wiechert-Potentiale, welche normalerweise durch eine komplizierte Rechnung mit Hilfe von normaler Vektoranalysis hergeleitet werden.

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{s} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - \boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v}}{s} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - \boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}$$

Frage: Wir haben behauptet, dass die obige Form der Liénard-Wiechert-Potentiale für jedes beliebige bewegte Teilchen gilt, wohingegen wir wissen, dass Lorentz-Transformation nur in Inertialsystemen (d.h. keine Beschleunigung) gelten. Glaubst du die obigen Gleichungen gelten auch im allgemeinen Fall ungleichförmiger Bewegung?

11. Strahlung bewegter Ladungen

Mit Hilfe der kovarianten Formulierung der Elektrodynamik haben wir einen allgemeinen Ausdruck für die Potentiale bewegter Ladungen gefunden. Dies ist ein wichtiger Schritt auf der Suche nach den Feldern einer bewegten Ladung, welche wir unten herleiten werden.

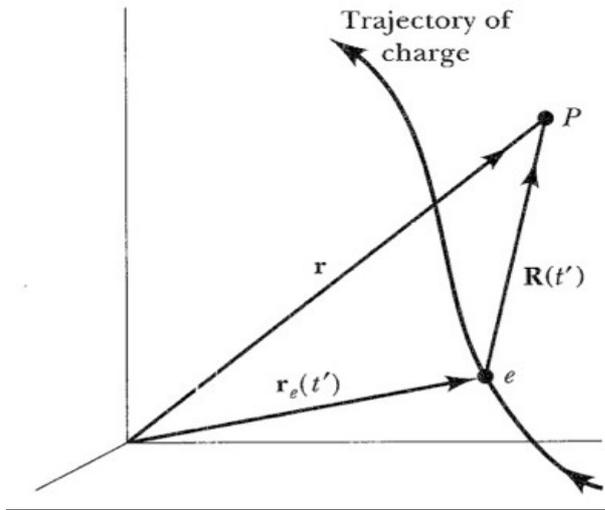
Wir werden sehen, dass geladene Teilchen Strahlung abgeben sobald sie beschleunigt werden – eine wichtige Tatsache im Leben eines Astronomen!

Liénard-Wiechert-Felder

Der Ausdruck für die Liénard-Wiechert-Potentiale kann im dreidimensionalen Raum in folgende Form gebracht werden:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \right]_{\text{ret}} \quad \text{and} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{q\mathbf{v}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \right]_{\text{ret}}$$

Hierbei ist \mathbf{R} der Abstand zwischen Emitter und Beobachter und $\boldsymbol{\beta}$ ist der Geschwindigkeitsvektor der Ladung q . (Wir führen die folgende Herleitung im dreidimensionalen Raum aus und nutzen das Konzept der retardierten Zeit.)



Von hier aus möchten wir Felder mit Hilfe ihrer Vektor-Definition berechnen.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Das retardierte Scalar Potential, z.B., lautet

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Wir nutze eine dummy Variabel t' , und schreibe das Retardation-effekt mit Dirac'sche Delta Funktion

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \int dt' \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c).$$

Der Ausdruck für das elektrische Feld lautet dann beispielsweise:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int dt' \frac{\delta(t' - t + R(t')/c)}{R(t')} - \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int dt' \frac{\mathbf{v}(t') \delta(t' - t + R(t')/c)}{R(t')}.$$

Dieses Integral ist nicht leicht auszuwerten. Es gilt:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t) = R(t)\hat{\mathbf{n}}(t).$$

$$\nabla R = \hat{\mathbf{n}} \text{ and } \nabla(1/R) = -\mathbf{R}/R^3.$$

Außerdem nutzen wir die Definition der retardierten Zeit:

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{R(t_{\text{ret}})}{c}.$$

und wir definieren den Parameter g folgendermaßen

$$g(t') = \frac{d}{dt'} [t' - t + R(t')/c] = 1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} \sqrt{\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{R}(t')} = 1 - \boldsymbol{\beta}(t') \cdot \hat{\mathbf{n}}(t') > 0.$$

Mit Hilfe dieser Variablen ergibt sich ein Ausdruck für das Feld \mathbf{E} einer Punktladung in beliebiger Bewegung:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}}}{gR^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dt} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}}{gcR} \right]_{\text{ret}},$$

Analog ergibt sich ein Ausdruck für das Magnetfeld \mathbf{B} :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{n}}}{gR^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{d}{dt} \left[\frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{n}}}{gcR} \right]_{\text{ret}}.$$

Die beiden obigen Gleichungen sind allerdings nicht sehr nützlich, da sie zeitliche Ableitungen beinhalten. Um sie in eine brauchbare Form zu bringen wenden wir folgende Identitäten an:

$$\frac{dR}{dt} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot c\boldsymbol{\beta}$$

$$\frac{dt}{dt_{\text{ret}}} = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR_{\text{ret}}}{dt_{\text{ret}}} = [1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}]_{\text{ret}} = g_{\text{ret}}.$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt} = \frac{c}{R} \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta}).$$

$$\frac{dg}{dt} = - \left[\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt} \cdot \boldsymbol{\beta} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} \right].$$

Nachdem alle Terme mit zeitlichen Ableitungen beseitigt wurden erhalten wir endlich die Ausdrücke für die Liénard-Wiechert-Felder. Für das elektrische Feld finden wir:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2)}{g^3 R^2} + \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \{(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{cg^3 R} \right]_{\text{ret}} = \mathbf{E}_v + \mathbf{E}_a.$$

Die Interessanteste Eigenschaft ist allerdings, dass das Feld in zwei getrennte Teile separiert werden kann: Ein Teil hängt nur von der Geschwindigkeit ab, welche mit wachendem Abstand wie $1/R^2$ abfällt, der andere Teil beinhaltet den Beschleunigungsterm (zeitliche Ableitung von $\boldsymbol{\beta}$) welcher wie $1/R$ abfällt. Der erste Teil bleibt an das Teilchen „gebunden“, während sich der zweite Teil ins Unendliche ausbreitet.

Ähnlich gilt für das Magnetfeld:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{(\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{n}})(1 - \beta^2)}{g^3 R^2} + \frac{(\boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{n}})(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + g\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \hat{\mathbf{n}}}{g^3 R} \right]_{\text{ret}} = \mathbf{B}_v + \mathbf{B}_a.$$

Wir können mehrere interessante Eigenschaften betrachten. Zum Beispiel sind \mathbf{E} und \mathbf{B} orthogonal (als individuelle Komponenten sowie als das gesamte Feld), aber der Geschwindigkeitsterm des elektrischen Feldes \mathbf{E}_v ist nicht orthogonal zur Bewegungsrichtung. Hierfür werden wir in Kürze das Beispiel eines Teilchens in gleichförmiger Bewegung betrachten.

$$c\mathbf{B}_v = \hat{\mathbf{n}}_{\text{ret}} \times \mathbf{E}_v \quad \text{and} \quad c\mathbf{B}_a = \hat{\mathbf{n}}_{\text{ret}} \times \mathbf{E}_a.$$

$$\mathbf{E}_v \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\text{ret}} \neq 0.$$

Andererseits bilden die Beschleunigungsterme immer eine orthogonale Triade ($\mathbf{n}_{\text{ret}}, \mathbf{B}, \mathbf{E}$) mit

$$c|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|$$

$$\mathbf{E}_a = c\mathbf{B}_a \times \hat{\mathbf{n}}_{\text{ret}} \quad \mathbf{E}_a \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\text{ret}} = 0 \quad \mathbf{B}_a \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\text{ret}} = 0.$$

Die Felder, welche durch Beschleunigung generiert werden, stehen also senkrecht aufeinander. Zudem fallen sie wie $1/R$ ab. Dies sind nichts anderes als die Eigenschaften eines Strahlungsfeldes

Beispiel: Felder für eine gleichförmig bewegte Ladung

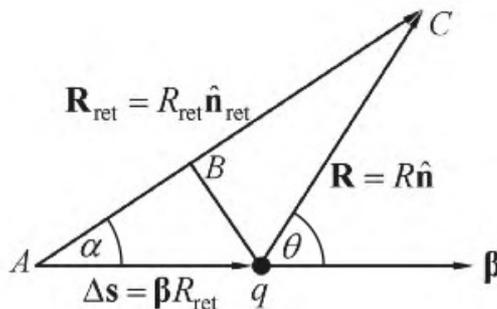
Dieser Fall wurde bereits in der Vorlesung zur Relativität behandelt, soll aber nun erneut vom Standpunkt der Liénard-Wiechert-Felder behandelt werden. In diesem Fall gilt:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = 0.$$

Damit lautet der Ausdruck für das elektrische Feld (nur der Geschwindigkeitsteil):

$$\mathbf{E}_v = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2)}{g^3 R^2} \right]_{\text{ret}}.$$

Um die Situation zu vereinfachen nutzen wir die Zeichnung unten:



Wir finden die folgenden Identitäten:

$$[\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}]_{\text{ret}} = \frac{\mathbf{R}}{R_{\text{ret}}}$$

$$\Delta \mathbf{s} = \mathbf{v}(t - t_{\text{ret}}) = \boldsymbol{\beta} R_{\text{ret}}.$$

$$\boldsymbol{\beta} R_{\text{ret}} + \mathbf{R} = \mathbf{R}_{\text{ret}} = R_{\text{ret}} \hat{\mathbf{n}}_{\text{ret}}.$$

Außerdem ist die Strecke \overline{AB} die Projektion des Vektors $\boldsymbol{\beta} R_{\text{ret}}$ entlang der Richtung \mathbf{n} . Daher folgt aus der Definition von g , welche vorher besprochen wurde:

$$\overline{AB} = \boldsymbol{\beta} R_{\text{ret}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\text{ret}}$$

$$\overline{BC} = R_{\text{ret}}(1 - \hat{\mathbf{n}}_{\text{ret}} \cdot \boldsymbol{\beta}) = [gR]_{\text{ret}}.$$

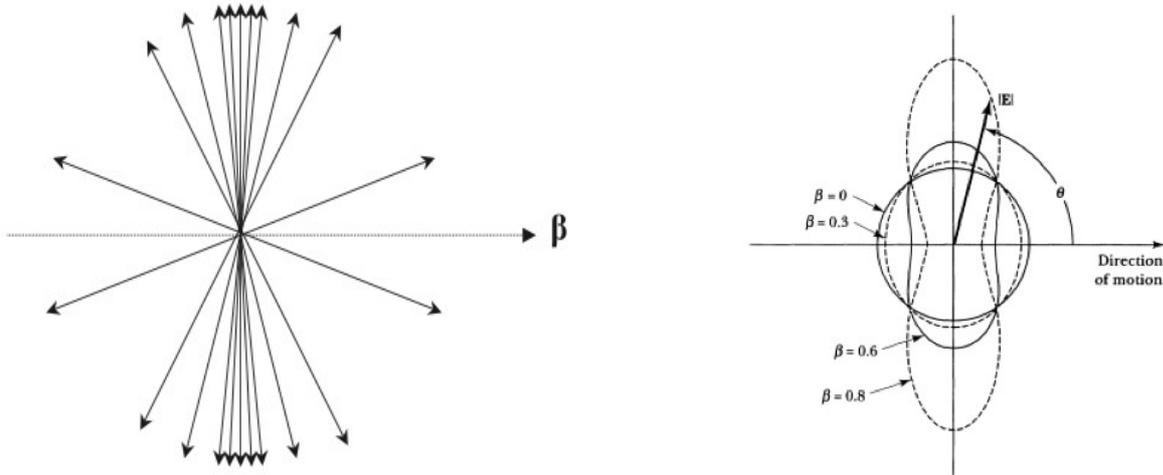
Und damit:

$$[gR] = R(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{1/2}$$

Mit Hilfe der letzten Relation erhalten wir letztlich den Ausdruck für das elektrische Feld einer gleichförmig bewegten Ladung:

$$\mathbf{E}_v(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}.$$

Wir sehen also, dass die Feldstärke in Bewegungsrichtung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit reduziert, aber ungleich Null ist.



Für das Magnetfeld ergibt sich, wie wir zuvor gesehen haben:

$$\mathbf{B}_v = \frac{\hat{\mathbf{n}}_{\text{ret}}}{c} \times \mathbf{E}_v = \frac{1}{c} \left[\boldsymbol{\beta} + \frac{\mathbf{R}}{R_{\text{ret}}} \right] \times \mathbf{E}_v = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}_v.$$

Beschleunigter Ladung: Die Larmor-Formel

Eine wohlbekannte Formel für die abgestrahlte Gesamtleistung einer sich langsam bewegenden Punktladung ($d\beta/dt \neq 0$) ist die Larmor-Formel:

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2 |\mathbf{a}_{\text{ret}}|^2}{3c^3}.$$

Diese gilt nur im nicht-relativistischen Grenzfall ($\beta \ll 1$). Wie können wir diese Formel herleiten und wie kann sie für beliebige Geschwindigkeiten (d.h. bis zu $\beta \approx 1$) verallgemeinert werden?

Wir beginnen mit der Berechnung des Poynting-Vektors der Beschleunigungsfelder:

$$\mathbf{S}(t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_a \times \mathbf{B}_a = \epsilon_0 c E_a^2 \hat{\mathbf{n}}_{\text{ret}} = \epsilon_0 c \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left| \frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{cg^3 R} \right|_{\text{ret}}^2 \hat{\mathbf{n}}_{\text{ret}},$$

wobei sowohl \mathbf{E} als auch \mathbf{B} mit $1/R$ abfallen. Der Poynting-Vektor beschreibt die Rate des Energieflusses durch das Raumwinkelement $d\Omega$.

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{dU}{dt d\Omega} = R^2 \mathbf{S}(t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\text{ret}}.$$

Die obige Formel beschreibt die Abgestrahlte Energie in Einheiten der vom Beobachter gemessenen Zeit. Allgemein ist die im Intervall dt gemessene Energie nicht gleich der im Zeitintervall dt_{ret} emittierten Energie. Physikalisch gesehen ist die im Ruhesystem des Teilchens gemessene Leistung von größerer Bedeutung, da diese uns etwas über den Emissionsmechanismus verrät! Daher möchten wir die obige Gleichung über dt_{ret} ausdrücken:

Durch Nutzung von:

$$dt/dt_{\text{ret}} = (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})_{\text{ret}} = g_{\text{ret}}$$

finden wir nach einiger Algebra:

$$\frac{dP(t_{\text{ret}})}{d\Omega} = \frac{dU}{dt_{\text{ret}} d\Omega} = g_{\text{ret}} R^2 \mathbf{S}(t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\text{ret}} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \Bigg|_{\text{ret}}.$$

Integration der obigen Gleichung über alle Winkel ergibt schließlich:

$$P = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^6 \left[a^2 - \left(\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{c} \right)^2 \right]_{\text{ret}}.$$

Das ist die allgemeine Form der Larmor-Formel für beliebige Geschwindigkeiten. Der Faktor γ^6 ist sehr wichtig da er zeigt, dass die abgestrahlte Leistung extrem ansteigt wenn sich die Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit annähert. Hierdurch ergibt sich ein großer Unterschied zwischen nicht-relativistischer und der relativistischer Bewegung von Teilchen, welche wir in der nächsten Vorlesung genauer Besprechen werden (Zyklotronstrahlung vs. Synchrotronstrahlung).

Die obige Verallgemeinerung der Larmor-Formel können wir auch mit Hilfe von Vierervektoren erhalten, indem wir beachten, dass die emittierte Gesamtleistung ein Lorentz-Skalar ist. Wir müssen lediglich $|\mathbf{a}|^2$ mit dem Skalarprodukt der Viererbeschleunigung ersetzen (U^μ ist die Vierergeschwindigkeit).

$$\mathcal{A}_\mu = dU_\mu/d\tau.$$

$$P = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2q^2}{3c^3} \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\mu = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2q^2}{3m^2 c^3} \frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau}.$$

Durch Aufschreiben der Komponenten des Viererimpulses und Berechnung der Ableitungen kann leicht gezeigt werden, dass:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} \right)^2 = (mc\gamma)^2 \left[\frac{d(\gamma\boldsymbol{\beta})}{dt} \cdot \frac{d(\gamma\boldsymbol{\beta})}{dt} - \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 \right].$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \quad \text{and} \quad \frac{d(\gamma\boldsymbol{\beta})}{dt} = \gamma \dot{\boldsymbol{\beta}} + \gamma^3 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \boldsymbol{\beta}.$$

$$P = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2q^2}{3c} \gamma^6 [\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2]_{\text{ret}}.$$

Dieses Ergebnis ist identisch zum vorherigen.

Zuletzt möchten wir zeigen, dass sich die obige, allgemeine Formel für die abgestrahlte Leistung bei beliebiger Geschwindigkeit im nicht-relativistischen Grenzfall zur wohlbekannteren Larmor-Formel vereinfacht:

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2 |\mathbf{a}_{\text{ret}}|^2}{3c^3}.$$

Dafür setzen wir einfach $\beta = 0$ (die Beschleunigung ist aber ungleich Null). Dann ergibt sich:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} |\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a})| = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} |\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}|^2 = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \sin^2 \theta.$$

Das ist die Larmor-Formel mit Winkelabhängigkeit. Aus ihr folgt das berühmte, torusförmige Strahlungsmuster. In Bewegungsrichtung gibt es keine Strahlung!



Um die Gesamtleistung zu erhalten müssen wir lediglich die obige Gleichung über alle Winkel integrieren. Da $\int \sin^2 \theta d\Omega = 8\pi/3$ ist erhalten wir letztlich die wohlbekanntere Formel für nicht-relativistische Bewegung.

Definition des Strahlungsfeldes

Da Strahlung die Energie einer lokalisierten Ladung- (oder Strom-) Verteilung in unendliche wegträgt muss die Feldstärke langsamer als mit $1/R^2$ abfallen. Anderenfalls gäbe es keinen Energiefluss durch eine unendlich weit entfernte Kugeloberfläche!

Um das formal zu beweisen betrachten wir den Energiefluss (gegeben durch den Poynting-Vektor) durch ein Flächenelement $r^2 d\Omega$. Im Grenzfall $r \rightarrow \infty$ ist die Leistung (Energiefluss pro Zeit) durch diese Flächenelement gegeben durch:

$$dP(t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) r^2 d\Omega.$$

Daraus folgt für $r \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{S} \propto \hat{\mathbf{r}}/r^2$$

oder, da \mathbf{S} proportional zu $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ist müssen sich die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} im selben Grenzfall wie $1/r$ verhalten.

12. Strahlung: Besondere Fälle

In diesem Kapitel betrachten wir die Strahlung eines einzelnen geladenen Teilchens (meist eines Elektrons) in einigen besonderen Fällen. Die interessantesten Fälle sind diejenigen, in denen sich das Teilchen mit ultrarelativistischen Geschwindigkeiten bewegt ($\beta \approx 1$). Zuerst soll aber noch erwähnt werden was im Fall von N Teilchen passieren kann.

Strahlung von N beschleunigten geladenen Teilchen

Wir haben bereits einen Ausdruck für die Strahlung eines beschleunigten geladenen Teilchens (z.B. eines Elektrons) gefunden und außerdem eine Formel für die Gesamtstrahlungsleistung hergeleitet. Können wir annehmen, dass im allgemeinen Fall von N Teilchen die Gesamtstrahlungsleistung einfach N -mal so hoch ist? Leider ist die Antwort nicht so einfach! Um die genaue Lösung zu finden benötigt man die Quantenmechanik. Im Allgemeinen gibt es drei verschiedene Fälle:

- 1) Der Abstand der strahlenden Teilchen ist viel kleiner als ihre typische Wellenlänge. In diesem Fall können Phasendifferenzen vernachlässigt werden und die elektrischen und magnetischen Felder werden einfach aufsummiert, d.h. Die Feldstärken sind proportional zu N . Da die emittierte Leistung proportional zum Produkt der Feldstärken ist wächst die emittierte Leistung proportional zu N^2 . Dies ist der Fall bei kohärenter Emission. Beispiel: Laser.
- 2) Es ist auch möglich, dass die strahlenden Teilchen vollständig außer Phase sind, sodass sich ihre Phasen gegenseitig aufheben. In diesem Fall ist die Gesamtstrahlungsleistung gleich Null.
- 3) Am häufigsten ist jedoch, dass die Teilchen einer Zufallsverteilung folgen, welche oft durch eine thermische Geschwindigkeitsverteilung charakterisiert wird. In diesem Fall kann gezeigt werden, dass zu jedem beliebigen Zeitpunkt \sqrt{N} Teilchen in Phase sind, sodass die emittierte Gesamtstrahlungsleistung einfach proportional zu N ist. Dieser Fall wird als inkohärente Strahlung bezeichnet und beinhaltet die meisten Beispiele aus dem Alltag und dem Universum.

12.1 Beispiele für die Strahlung beschleunigter Elektronen

In der letzten Vorlesung haben wir die allgemeine Formel für die abgestrahlte Leistung eines geladenen Teilchens in beliebiger Bewegung als Funktion des Raumwinkels kennengelernt:

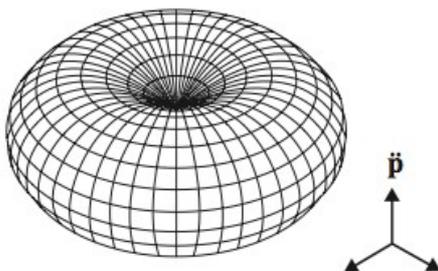
$$\frac{dP(t_{\text{ret}})}{d\Omega} = \frac{dU}{dt_{\text{ret}} d\Omega} = g_{\text{ret}} R^2 \mathbf{S}(t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\text{ret}} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \Big|_{\text{ret}}.$$

• Nichtrelativistische Bewegung und Dipolstrahlung

Im nichtrelativistischen Fall erhalten wir die Lösung, indem wir einfach $\beta=0$ einsetzen (s. Letzte Vorlesung). Der Einfachheit halber befindet sich das Teilchen im Koordinatenursprung und die Beschleunigung wirke in Richtung der z-Achse ($\mathbf{a} = c \, d\boldsymbol{\beta}/dt$ und der Einheitsvektor \mathbf{r} verläuft entlang \mathbf{n}). Dann gilt:

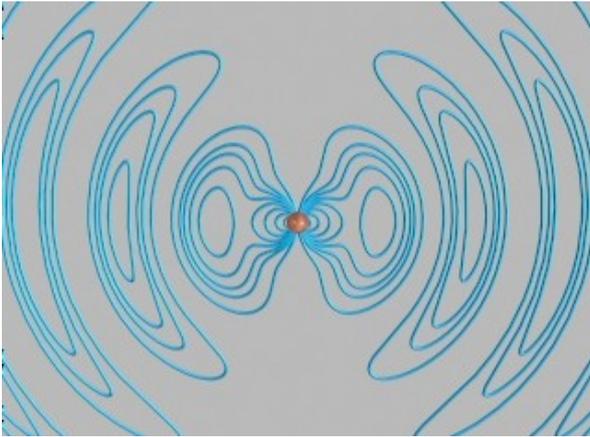
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} |\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a})|^2 = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} |\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}|^2 = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \sin^2 \theta.$$

Dieses Strahlungsmuster haben wir als Lamor-Formel kennengelernt.



Klassischerweise wird dies als Dipolstrahlung bezeichnet. Ein oszillierender Dipol ist einfach ein periodisch beschleunigtes geladenes Teilchen. Hertz hat als erster solche oszillierenden Ladungen als Quelle von

elektromagnetischer Strahlung beschrieben (ca. 1886). Daher wird der Dipol auch Hertzscher Dipol genannt. Die Abbildung unten zeigt wie Strahlung senkrecht zur Bildebene durch „field reconnection“ propagiert.



Wenn wir das Dipolmoment mit \mathbf{p} bezeichnen, dann ist die Beschleunigung durch die doppelte Zeitableitung von \mathbf{p} gegeben (Zur Erinnerung: \mathbf{p} ist nur ein Vektor und besitzt daher die Dimension Länge). In diesem Fall erhalten wir die Formeln für das \mathbf{E} und das \mathbf{B} Feld für den Hertzschen Dipol:

$$\mathbf{B}_{E1} = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}_{\text{ret}}}{r}$$

$$\mathbf{E}_{E1} = -\hat{\mathbf{r}} \times c\mathbf{B}_{E1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{\text{ret}}) - \ddot{\mathbf{p}}_{\text{ret}}}{r}$$

Die gesamte abgestrahlte Leistung ist:

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{E1} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} |\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}_{\text{ret}}|^2.$$

$$P_{E1}(t) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} |\ddot{\mathbf{p}}_{\text{ret}}|^2 \int d\Omega \sin^2 \theta = \frac{\mu_0}{6\pi c} |\ddot{\mathbf{p}}_{\text{ret}}|^2.$$

In der Realität ist es viel einfacher den Strom in einer Schleife zu variieren, als Ladungen rauf und runter zu bewegen! Es sei daran erinnert, dass ein Kreisstrom nichts anderes als ein magnetischer Dipol ist. Also erzeugt ein solcher, zeitlich veränderlicher Strom magnetische Dipolstrahlung. Das ist das grundlegende Prinzip nahezu aller Übertragungsantennen.

Wenn ein Strom $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ in einem Kreisleiter mit Radius b oszilliert, dann kann der magnetische Dipol geschrieben werden als:

$$\mathbf{m}(t) = \pi b^2 I(t) \hat{\mathbf{z}} = m_0 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{z}},$$

$$m_0 \equiv \pi b^2 I_0$$

Ähnlich wie im elektrischen Fall können wir den Energiefluss mit Hilfe des Poynting Vektors bestimmen (dabei ist θ der Winkel zwischen \mathbf{z} und der Messrichtung \mathbf{r}):

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\mu_0}{c} \left\{ \frac{m_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \right\}^2 \hat{\mathbf{r}},$$

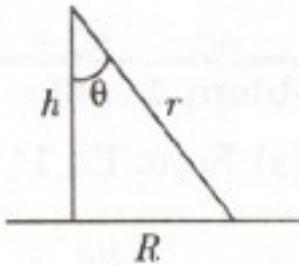
In der Realität messen wir die Intensität des, über viele Zyklen gemittelten, Energieflusses, also:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \left(\frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

Das ist dieselbe Winkelabhängigkeit, die wir bereits in der Larmor-Formel gefunden haben. Die emittierte Gesamtleistung kann durch mitteln über alle Winkel gefunden werden:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}.$$

Ein schönes Anwendungsbeispiel der obigen Formel ist die Messung der Strahlung (d.h. die Rate des Energieflusses, beschrieben durch \mathbf{S}) einer beliebigen Antenne auf Bodenhöhe. Wenn der strahlende Dipol an einer Antenne mit Höhe h montiert ist und wir die Leistung vom Boden aus in Entfernung R zur Basis messen, dann zeigt eine einfache Rechnung, dass die gemessene Leistung maximal ist wenn $h = R$ gilt. (Außerdem empfangen wir offensichtlich keine Leistung direkt unter der Antenne, wo $\theta = 0$ ist.)



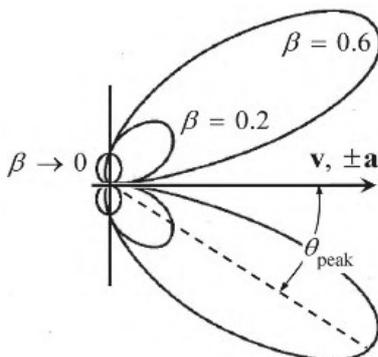
Zu Beispiel ist die maximale am Boden empfangende Leistung von einer FM Radioantenne mit einer Ausgangsleistung von 30 kW, welche auf einem 100 m hohen Turm montiert ist, ca. $9 \mu\text{W}/\text{cm}^2$. Für eine leistungsschwache Mobilfunkantenne ($P \sim 20 \text{ W}$) auf einem Hausdach ($h \sim 5 \text{ m}$) erhalten wir ungefähr $2.4 \mu\text{W}/\text{cm}^2$ für $h = R$. Ist das mit den Sicherheitsrichtlinien vereinbar?

12.2 Beschleunigung || Geschwindigkeit: Bremsstrahlung

Auf der Suche nach einem Ausdruck für die Strahlungsleistung im nichtrelativistischen Fall vereinfacht sich die Formel deutlich, wenn Beschleunigungsvektor \mathbf{a} und Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} parallel zueinander sind. Die Strahlung ist dann axialsymmetrisch zur Beschleunigungs-/Fortbewegungs-richtung und ist gegeben durch:

$$\frac{dP}{d\Omega} \Big|_{\parallel} = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} \frac{a^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}.$$

Die Abhängigkeit von a^2 zeigt, dass das Strahlungsmuster für Beschleunigung und Abbremsung identisch ist. Die emittierte Leistung ist Null bei $\theta = 0$ und die Keulen sind mit steigender Geschwindigkeit zunehmend nach vorne gerichtet.



Galaxienhaufen emittieren Bremsstrahlung im Röntgenbereich. Galaxienhaufen setzen sich zu großen Teilen aus einem heißen Plasma zusammen, welches eine typische Temperatur von einigen keV hat ($1\text{keV} \approx 10^7\text{ K}$). Zum Vergleich: Die Ruhemasse eines Elektrons beträgt $511\text{ keV}/c^2$. Daher ist selbst bei solchen Temperaturen β recht klein.

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_{\text{tot}}}{m_0c^2} = \frac{E_{\text{kin}} + m_0c^2}{m_0c^2}$$

Mit der obigen Formel kann man leicht sehen, dass

- $\beta \approx 0$ für Elektronen mit einer kinetischen Energie von 1 eV (ca. 10^4 K)
- $\beta \approx 0.06$ für Elektronen mit einer kinetischen Energie von 1 keV (ca. 10^7 K)
- $\beta \approx 0.94$ für Elektronen mit einer kinetischen Energie von 1 MeV
- $\beta \approx 0.9999999$ für Elektronen mit einer kinetischen Energie von 1 GeV

In manchen astrophysikalischen Objekten gibt es GeV Elektronen. Im diesem Fall ist $\beta \approx 1$, $\theta \approx 0$ und der Nenner des Ausdrucks für die Bremsstrahlung verschwindet fast. Wir können schreiben:

$$1 - \beta = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta} = \frac{1}{\gamma^2(1 + \beta)} \approx \frac{1}{2\gamma^2} \quad (\beta \approx 1)$$

$$1 - \beta \cos \theta \approx \frac{1 + \gamma^2 \theta^2}{2\gamma^2} \quad (\beta \approx 1, \theta \ll 1).$$

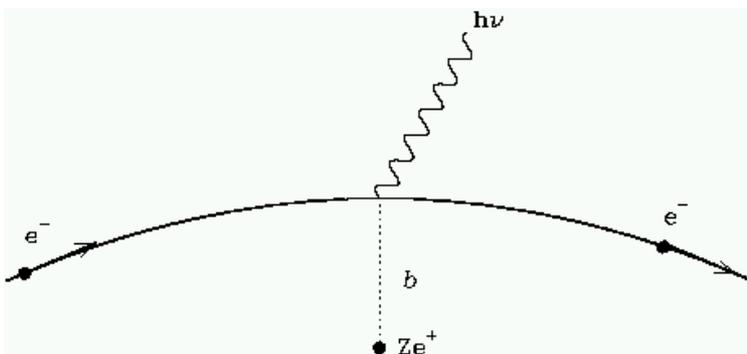
Womit wir einen Ausdruck für ultrarelativistische Bremsstrahlung erhalten.

$$\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_{\parallel} \approx \frac{2\mu_0 q^2 a^2}{\pi^2 c} \frac{\gamma^8 (\gamma\theta)^2}{[1 + (\gamma\theta)^2]^5} \quad (\gamma \gg 1, \theta \ll 1).$$

Indem wir das Maximum der obigen Relation in Abhängigkeit von $\gamma\theta$ bestimmen stellen wir fest, dass die Winkelverteilung für $\gamma \gg 1$ von zwei intensiven γ^8 Peaks bei den Winkeln $\theta = \pm \theta_{\text{peak}} \approx \pm 1/2\gamma$ dominiert wird.

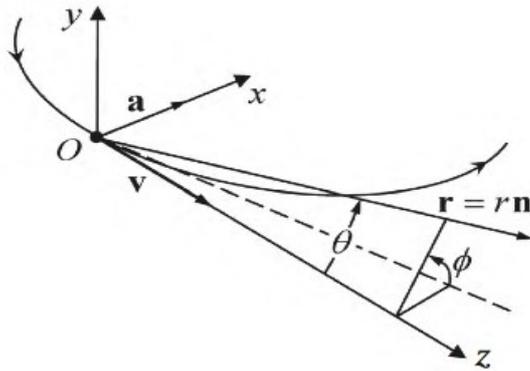
Beide Peaks haben eine Breite von $\Delta\theta \sim 1/\gamma$ (s. Abbildung).

In der Astrophysik liegt meist ein Elektron-Proton Plasma vor. Durch die hohe kinetische Energie der Elektronen ist die Abweichung der Bahn von einer geraden Linie bei der Streuung an einem Proton vernachlässigbar. Beim Vorbeiflug an einem Proton (oder einem anderen Ion) verringert sich jedoch die Geschwindigkeit des Elektrons ein wenig. Das plötzliche Abbremsen verursacht Bremsstrahlungsemission.



12.3 Beschleunigung \perp Geschwindigkeit: Zyklotron & Synchrotron Strahlung

Im anderen Fall sind Beschleunigung und Geschwindigkeit senkrecht zueinander. Das passiert immer, wenn sich ein geladenes Teilchen durch ein Magnetfeld bewegt, da die Lorentzkraft senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkt. Dieser Fall ist besonders interessant für Teilchenphysiker und Astrophysiker!



$$\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{a} = a\hat{\mathbf{x}}, \text{ and } \hat{\mathbf{n}}_{\text{ret}} \approx \sin\theta \cos\phi\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta \sin\phi\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}$$

Die Lösung ist schwieriger zu erhalten als im Fall der Bremsstrahlung, da es sowohl eine Abhängigkeit vom Polarwinkel θ , als auch vom Azimutwinkel ϕ gibt. Nicht-triviale Algebra liefert das Ergebnis:

$$\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_{\perp} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{1}{(1 - \beta \cos\theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2\theta \cos^2\phi}{\gamma^2(1 - \beta \cos\theta)^2} \right].$$

Der nichtrelativistische Grenzfall $\beta \approx 0$ ist bekannt als Synchrotronstrahlung. Sie hat die Winkelabhängigkeit $(1 - \sin^2\theta \cos^2\phi)$.

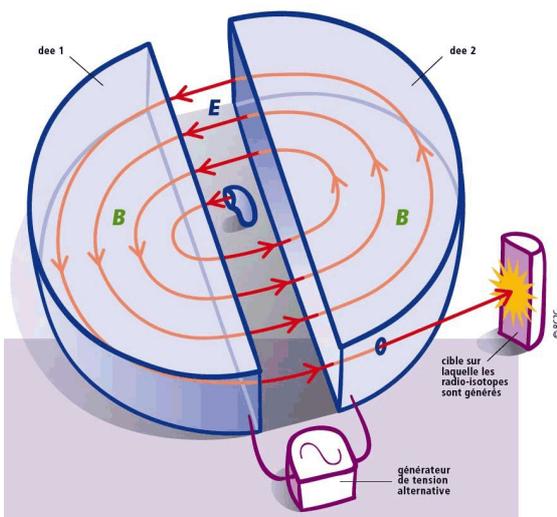
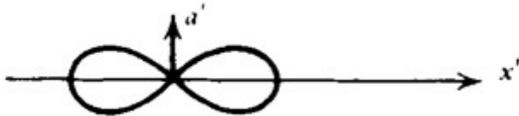
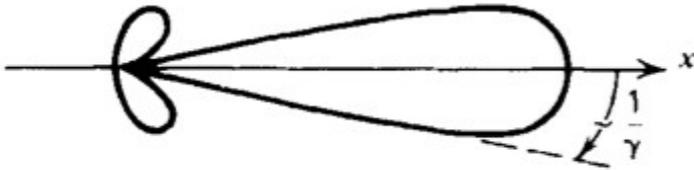


Abbildung: Ein Zyklotron, in dem sich Elektronen nahezu kreisförmigen Bahnen durch ein Magnetfeld bewegen. Die Energie wird den Elektronen über hochfrequente Wechselspannung zwischen den beiden Halbkreisen zugeführt. Zur Erinnerung: Es wird ein elektrisches Feld zum Erhöhen der kinetischen Energie benötigt.

Erneut ist der interessanteste Fall der ultrarelativistische Fall mit $\beta \approx 1$. Hier erfüllt die Winkelverteilung die folgende Gleichung:

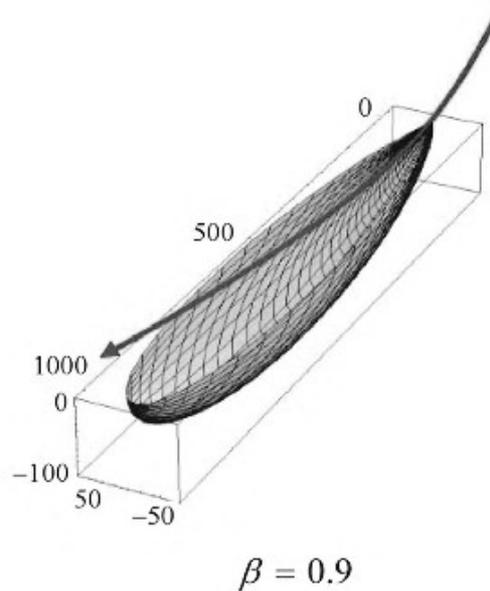
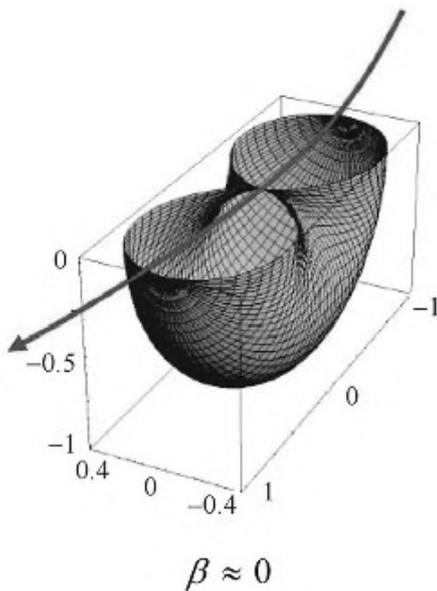
$$\frac{dP}{d\Omega} \Big|_{\perp} \approx \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{8\gamma^6}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \left[1 - \frac{4\gamma^2 \theta^2 \cos^2 \phi}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2} \right] \quad (\gamma \gg 1).$$

Die emittierte Strahlung ist entlang eines schmalen Strahls mit einer Breite $\sim 1/\gamma$ konzentriert und wird in Bewegungsrichtung abgegeben (d.h. Maximum bei $\theta = 0$). Dieser Effekt wird auch relativistisches Beaming genannt. Das ist nichts anderes als der relativistische Dopplereffekt, bei dem der Lorentzfaktor den Anteil an vorwärtsgerichteter Strahlung erhöht und den Anteil der nach hinten gerichteten Strahlung reduziert.



Was außerdem auffällt ist die starke γ^6 Abhängigkeit der abgestrahlten Leistung. Aus diesem Grund ist es nicht möglich Elektronen in einem Kreisbeschleuniger auf TeV Energien zu bringen. Die Strahlungsverluste werden einfach zu hoch! Für Elektronen würde man einen Linearbeschleuniger benötigen. Der LHC am CERN verwendet Protonen und Schwerionen, da die abgestrahlte Leistung umgekehrt proportional zur Masse ist. Dadurch können wir mit diesen Teilchen Energien im TeV Bereich erreichen.

In der Astrophysik trifft man fast täglich auf Synchrotronstrahlung! Sie kann in Supernova-Explosionen, Pulsaren, dem Zentren von Galaxien und in Galaxienhaufen beobachtet werden. Im letzten Fall erstreckt sich das Emissionsgebiet über viele Millionen Lichtjahre!



13. Lagrange- und Hamilton- Formalismus der Elektrodynamik

Im letzten Kapitel geben wir eine Einführung in die Nutzung der mächtigen Lagrange- und Hamilton-Formalismen in der Elektrodynamik. Im Prinzip handelt es sich um eine Erweiterung dessen, was wir bereits in der klassischen Mechanik kennengelernt haben. Die neu erlernte Physik fließt in die Definition der Lagrangefunktion eines geladenen Teilchens welches sich durch ein elektromagnetisches Feld bewegt.

Diese Methode basiert auf dem Prinzip der kleinsten Wirkung, welches ursprünglich zum Lösen von Problemen in der Optik eingeführt wurde. Im 19. Jahrhundert wurde das Prinzip der kleinsten Wirkung von vielen Wissenschaftlern als zentrales Prinzip der Physik angesehen. Maxwell hat das Prinzip der kleinsten Wirkung zwar in seinen Schriften diskutiert, es aber selbst nie benutzt. Helmholtz war der erste, dem es gelang eine brauchbare Formulierung des Elektromagnetismus mit Hilfe des Lagrange-Formalismus aufzustellen. Seine Lösung wird jedoch nicht länger genutzt. Die Formulierung die wir uns heute ansehen wurde erstmals von Lorentz im Jahr 1892 genutzt (wobei der moderne, kovariante Formalismus erst viel später eingeführt wurde).

13.1 Wiederholung der Lagrange/Hamilton Formulierung der Mechanik

Die Lagrangefunktion ist definiert als:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V$$

wobei q_i und dq/dt die generalisierten Koordinaten bzw. Geschwindigkeiten sind.

Die Wirkung ist definiert als:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

und durch das Variationsprinzip mit zwei festen Endpunkten t_1 und t_2 erhalten wir $\delta S = 0$. In diesem Fall erfüllt die Lagrangefunktion L die Euler-Lagrange Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Ausgehend von L kann die Hamilton-Funktion H definiert werden:

$$H(p_i, q_i, t) = p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

mit dem kanonisch konjugierten Impuls

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Mit den obigen Definitionen lassen sich die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen aufstellen, welche die selbe Physik wie die Euler-Lagrange Gleichungen beschreiben.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i = -\frac{dp_i}{dt} \end{aligned}$$

13.2 Lagrange Funktion eines geladenen Teilchens in einem EM-Feld

Wir möchten ein intuitives Verständnis der Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischem Feld erhalten. Dafür betrachten wir ein Teilchen mit Ladung e und Masse m , welches sich mit einer nicht-relativistischen Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ durch ein bekanntest Feld bewegt und leiten die

Lagrange-Funktion rückwärts aus der Lorentzkraft her. Für diese Aufgabe ignorieren wir den Term für das Feld in der Lagrange-Funktion (dieser wird für das Konzept der Lagrange-Dichte benötigt, welches in der nächsten Vorlesung besprochen wird).

Aus der Lorentzkraft folgt die folgende Bewegungsgleichung:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)].$$

Zusätzlich kann die Euler-Lagrange Gleichung in die folgende Form gebracht werden:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}.$$

→

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{v}} \right) = \frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{r}} = \nabla L_0.$$

(Für dieses spezifische Problem wurde die Lagrange-Funktion in der zweiten Gleichung als L_0 definiert.)
Beachte den Gradienten auf der rechten Seite der Gleichung welcher darauf hinweist, dass die Lagrange-Funktion über Potentiale geschrieben werden sollte. Die Potentiale sind Definiert durch:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Nun benötigen wir die folgende Vektoridentität und erinnern uns daran, dass die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ keine Funktion der Zeit ist:

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{v}$$

Damit können wir die Lorentzkraft in folgende Form bringen:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e \left[\nabla\varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right].$$

Die zwei mittleren Terme in der rechten Seite der Gleichung sind nichts anderes als die Definition der gesamten (oder konvektiven) Ableitung in einem bewegten Bezugssystem eines Fluids:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}.$$

Daher können wir die Terme wie folgt umordnen:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v} + e\mathbf{A}) = e\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - \varphi).$$

Ein Vergleich mit der Euler-Lagrange Gleichung oben erlaubt uns die Lagrange-Funktion in folgende Form zu bringen:

$$L_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}mv^2 + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - e\varphi(\mathbf{r}, t).$$

Das ist die Antwort, nach der wir gesucht haben. Dieses Ergebnis in eine kovariante, vierdimensionale Lagrange-Funktion zu verallgemeinern ist keine einfache Aufgabe und daher wird lediglich das Endergebnis ohne Herleitung im nächsten Kapitel angegeben.

Durch das Herleiten der dreidimensionalen Lagrange-Funktion aus der vierdimensionalen Form kann man sich von der Richtigkeit der letzteren Form überzeugen.

13.3 Lagrangefunktion in kovarianter (4-dimensionaler) Form

Für unser Vorhaben müssen wir die obigen Definitionen in eine kovariante (4-dimensionale) Form erweitern. Das ist recht einfach und führt nach Anwendung des Variationsprinzips zur kovarianten Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld

Analog zur dreidimensionalen Mechanik können wir eine allgemeine (kovariante) Form der Wirkung in vier Dimensionen angeben:

$$S_4 = \int L_4(x^\mu, u^\mu) d\tau$$

Hier ist $d\tau$ die Eigenzeit und L_4 ist die vierdimensionale Erweiterung der normalen, dreidimensionalen Lagrangefunktion. Nach der Anwendung des Prinzips der kleinsten Wirkung erhalten wir:

$$\delta S_4 = \delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} L_4(x^\mu, u^\mu) d\tau = 0$$

τ_0 und τ_1 sind feste Endpunkte der Raumzeit Bahn des Teilchens. Außerdem fordern wir, dass L_4 eine Skalar-Invariante ist.

Um L_4 zu bestimmen betrachten wir zunächst die Lagrangefunktion eines freien Teilchens, also seine kinetische Energie. In vierdimensionaler kovarianter Form ergibt sich:

$$L_4^{\text{free}} = \frac{1}{2} m_0 u^\mu u_\mu$$

Wechselwirkungen mit einem elektromagnetischen Feld geben dem Teilchen potentielle Energie. Mit Hilfe des Viererpotentials A^μ aus den vorherigen Vorlesungen können wir diese Wechselwirkungen verallgemeinern und so eine vierdimensionale Form der Lagrangefunktion aufstellen:

$$L_4 = \frac{1}{2} m_0 u^\mu u_\mu + q u_\mu A^\mu(x^\nu)$$

Den zweiten Term der Lagrangefunktion werden wir nicht herleiten. Es reicht aus zu erwähnen, dass dieser die richtige Antwort liefert. Um die physikalische Bedeutung dieses Terms zu verdeutlichen betrachten wir die Vektordarstellung (dreidimensional) der Lagrangefunktion, welche erstmals durch Lorentz bestimmt wurde:

$$\begin{aligned} L &= q \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + m v^2 - q \Phi - c \sqrt{m^2 v^2 + m_0^2 c^2} \\ &= m v^2 - q(\Phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - m c^2 = -q \Phi + q \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Da wir nun eine allgemeine Form für L_4 haben können wir das Variationsprinzip anwenden:

$$\begin{aligned} \delta S_4 &= \delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\frac{m_0}{2} u^\mu u_\mu + q u^\mu A_\mu(x^\nu) \right) d\tau \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\frac{m_0}{2} \frac{\partial(u^\mu u_\mu)}{\partial u^\mu} \delta u^\mu + q \left(A_\mu \delta u^\mu + u^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu \right) \right] d\tau \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[m_0 u_\mu \delta u^\mu + q \left(A_\mu \delta u^\mu + u^\mu \partial_\nu A_\mu \delta x^\nu \right) \right] d\tau = 0 \end{aligned}$$

Wir können die Definition der Vierergeschwindigkeit u^μ nutzen, um zu schreiben:

$$\delta u^\mu = \delta \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} (\delta x^\mu)$$

Einsetzen in das obige Integral liefert:

$$\delta S_4 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(m_0 u_\mu \frac{d}{d\tau} (\delta x^\mu) + q A_\mu \frac{d}{d\tau} (\delta x^\mu) + q u^\mu \partial_\nu A_\mu \delta x^\nu \right) d\tau$$

Dieses Integral können wir durch partielle Integration berechnen. Das wichtigste Prinzip einer Variationsrechnung ist, dass die Endpunkte festgelegt sind, d.h. wir fordern $\delta x = 0$ bei τ_0 und τ_1 . Damit erhalten wir:

$$\delta S_4 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(-m_0 \frac{du_\mu}{d\tau} \delta x^\mu - q \frac{dA_\mu}{d\tau} \delta x^\mu + q u^\mu \partial_\nu A_\mu \delta x^\nu \right) d\tau$$

Jetzt wechseln wir den Summationsindex von μ zu ν und ziehen den Faktor x^ν aus dem Integranden:

$$\delta S_4 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(-m_0 \frac{du_\nu}{d\tau} - q \frac{dA_\nu}{d\tau} + q u^\mu \partial_\nu A_\mu \right) \delta x^\nu d\tau$$

Im letzten Schritt nutzen wir die bekannte Kettenregel für Ableitungen:

$$\frac{dA_\nu}{d\tau} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \partial_\mu A_\nu u^\mu$$

Damit erhalten wir die Variation der Wirkung in der Form:

$$\delta S_4 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[-m_0 \frac{du_\nu}{d\tau} + q u^\mu (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) \right] \delta x^\nu d\tau$$

Da δx zwischen den beiden Endpunkten beliebig gewählt werden kann, muss der Ausdruck in den Klammern gleich Null sein, um das Variationsprinzip $\delta S = 0$ zu erfüllen. Es muss also gelten:

$$m_0 \frac{du_\nu}{d\tau} = q u^\mu (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)$$

Das ist die gesuchte Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld, welche manchmal als Minkowski-Gleichung bezeichnet wird. Es sei darauf hingewiesen, dass der Term innerhalb der Klammern nichts anderes als der Feldtensor $F_{\mu\nu}$ ist! So ergibt sich:

$$\boxed{m_0 \frac{du_\nu}{d\tau} = q u^\mu F_{\nu\mu}}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die obige Gleichung im Grenzfall von drei Vektoren die bekannte Lorentzkraft beschreibt:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma m_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q [\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})]$$

Kann die zeitliche Komponente dieser Gleichung bestimmt werden? Sie zeigt, dass das elektrische Feld Arbeit verrichtet, um die kinetische Energie eines Teilchens zu erhöhen.

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = \frac{E_{\text{kin}} + m_0 c^2}{dt} \equiv \frac{dE}{dt} = q\vec{u} \cdot \vec{E}$$

13.4 Eichinvarianz und Ladungserhaltung

Die Erhaltung elektrischer Ladung ist eine Folge der Eichinvarianz der Elektrodynamik und umgekehrt. Wir wollen dies mit Hilfe der nicht-relativistischen Form der dreidimensionalen Lagrange-Funktion zeigen, welche wir zuvor gefunden haben:

$$L_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} m v^2 + e \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - e \varphi(\mathbf{r}, t).$$

Wir benötigen die Definition der Eichtransformation für elektrodynamische Potentiale, welche wir für eine beliebige Skalarfunktion $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ definieren können:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \\ \phi &\longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

Es folgt sofort, dass die Lagrange-Funktion selbst nicht eichinvariant ist:

$$L'_0 = L_0 + e \left(\mathbf{v} \cdot \nabla \Lambda + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) = L_0 + e \frac{d\Lambda}{dt}.$$

Ist das ein Problem? Nein, denn die eigentliche Bewegungsgleichung wird durch die Euler-Lagrange Gleichung beschrieben und diese ist invariant unter Eichtransformationen. Das kann durch den folgenden Zusammenhang gezeigt werden:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\Lambda}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{\Lambda}}{\partial q_k},$$

Das bedeutet, dass die Ladung auf der linken Seite der Euler-Lagrange Gleichung genau mit der Ladung auf der rechten Seite übereinstimmt.

Um zu zeigen, dass die Ladungserhaltung eine Konsequenz der Eichinvarianz ist wenden wir das Prinzip der kleinsten Wirkung auf Änderungen der Eichung an. Das bedeutet wir suchen eine infinitesimal Eichfunktion $\delta\Lambda(\mathbf{r}, t)$, und erzeugen Transformationen des Potentials nach

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \nabla \delta\Lambda \\ \varphi &\rightarrow \varphi - \partial(\delta\Lambda)/\partial t \end{aligned}$$

Dies erzeugt die folgende Variation der Wirkungsfunktion, welche gleich 0 sein soll.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_k e_k \left\{ \mathbf{v}_k \cdot \nabla [\delta\Lambda(\mathbf{r}_k, t)] + \frac{\partial [\delta\Lambda(\mathbf{r}_k, t)]}{\partial t} \right\}.$$

Im Kontinuum-Grenzfall für Ladungen und Stromdichten lässt sich die obige Gleichung schreiben als:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left\{ \mathbf{j} \cdot \nabla(\delta\Lambda) + \rho \frac{\partial(\delta\Lambda)}{\partial t} \right\} = 0.$$

Im letzten Schritt ordnen wir die Terme der obigen Gleichung mit Hilfe der Produktregel für Integrationen neu an und erhalten:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[\nabla \cdot (\mathbf{j}\delta\Lambda) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta\Lambda) \right] - \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left(\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \right) \delta\Lambda = 0.$$

Das erste dieser beiden Raumzeit Integrale verschwindet aufgrund der Bedingungen für die Variation an den Endpunkten ($\delta q_k(\mathbf{r}, t_1) = \delta q_k(\mathbf{r}, t_2) = 0$). Da $\delta\Lambda(\mathbf{r}, t)$ beliebig gewählt werden kann muss der Term innerhalb der Klammern im zweiten Integral gleich 0 sein. Es folgt also:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Diese Gleichung ist nichts anderes als die Kontinuitätsgleichung für die Erhaltung der Ladung!

13.5 Hamilton Formalismus

Um eine ähnliche Sammlung von Gleichungen wie die Hamilton Gleichungen im vierdimensionalen Raum zu finden definieren wir zunächst die kovariante Form des kanonisch konjugierten Impulses:

$$p^\mu = \frac{\partial L_4}{\partial u_\mu}$$

Zusammen mit der Vierergeschwindigkeit u^μ definieren wir die Vierer-Hamilton-Funktion:

$$H_4 = p^\mu u_\mu - L_4$$

Die folgenden acht partiellen Differentialgleichungen definieren die Hamilton Gleichungen in kovarianter Form:

$$\frac{\partial H_4}{\partial p^\mu} = \frac{dx_\mu}{d\tau}$$

$$\frac{\partial H_4}{\partial x^\mu} = -\frac{dp_\mu}{d\tau}$$

Wir möchten nun dieselbe Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen in einem elektromagnetischen Feld mit Hilfe des Hamilton Formalismus finden.

Um dieses Ziel zu erreichen schreiben wir zunächst die Vierer-Hamilton-Funktion mit Hilfe von L_4 auf:

$$H_4 = p^\mu u_\mu - L_4 = p^\mu u_\mu - \frac{1}{2} m_0 u^\mu u_\mu - q u_\mu A^\mu(x^\nu)$$

Aus der Definition des kanonischen Impulses p^μ folgt:

$$p^\mu = \frac{\partial L_4}{\partial u_\mu} = \frac{\partial}{\partial u_\mu} \left(\frac{1}{2} m_0 u^\mu u_\mu + q u_\mu A^\mu(x^\nu) \right) = m_0 u^\mu + q A^\mu$$

Einsetzen in H_4 liefert:

$$H_4 = m_0 u^\mu u_\mu + q A^\mu u_\mu - \frac{1}{2} m_0 u^\mu u_\mu - q u^\mu A_\mu(x^\nu) = \frac{1}{2} m_0 u^\mu u_\mu$$

Weil $u^\mu u_\mu = c^2$ ist, sehen wir, dass H_4 tatsächlich eine Skalar-Invariante mit dem Wert

$$H_4 = \frac{m_0 c^2}{2}$$

ist. Wir können H_4 weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned} H_4 &= \frac{m_0}{2} \left(\frac{1}{m_0} (p^\mu - q A^\mu) \frac{1}{m_0} (p_\mu - q A_\mu) \right) \\ &= \frac{1}{2 m_0} (p^\mu - q A^\mu) (p_\mu - q A_\mu) \\ &= \frac{1}{2 m_0} (p^\mu p_\mu - 2 q A^\mu p_\mu + q^2 A^\mu A_\mu) \end{aligned}$$

Dies kann nun in die Hamilton Gleichung eingesetzt werden und liefert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_4}{\partial x^\mu} &= -\frac{q}{m_0} (p^\nu - q A^\nu) \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \\ &= -\frac{q}{m_0} m_0 u^\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \\ &= -q u^\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \\ &= -\frac{d p_\mu}{d \tau} = -m_0 \frac{d u_\mu}{d \tau} - q \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} u^\nu \end{aligned}$$

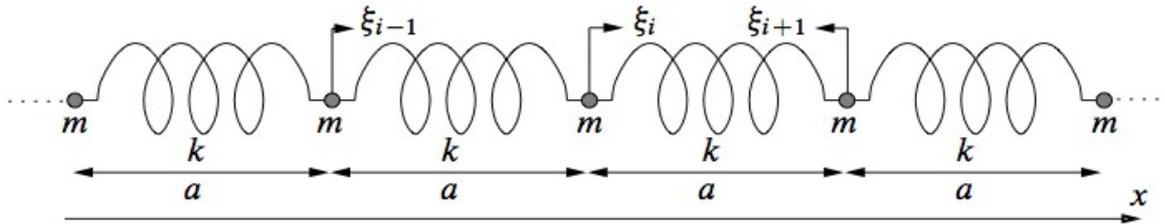
Durch umstellen der Terme der obigen Gleichung erhalten wir schließlich die gesuchte Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen, aber diesmal über den Hamilton Formalismus:

$$m_0 \frac{d u_\mu}{d \tau} = q u^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = q u^\nu F_{\mu\nu}$$

13.6 Das Konzept der Lagrange-Dichte

Da wir mit Feldern arbeiten sind die Konzepte des Lagrange- und Hamilton Formalismus für diskrete Teilchen nicht sehr hilfreich! Darum führen wir jetzt die Lagrange- und Hamilton-Dichte ein, deren Volumenintegral die gewöhnlichen Lagrange- und Hamilton-Funktion liefert.

Um dieses Konzept zugänglicher zu machen betrachten wir als Analogie viele Teilchen mit Masse m , welche durch kleine Federn der Länge a miteinander verbunden sind (s. Abbildung). Dieses System ist eindimensional und soll in x -Richtung verlaufen. Die Variable ξ_i zeigt die Verschiebung der Masseteilchen m_i von ihrer Gleichgewichtslage.



Wir können die Lagrangefunktion des Gesamtsystems als die Summe vieler individueller Lagrangefunktion aufschreiben, wobei wir das Hookesche Gesetz mit Federkonstante k zum beschreiben der Federn verwenden:

$$L = \sum_{i=1}^N a \mathcal{L}_i$$

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2} \left[\frac{m}{a} \dot{\xi}_i^2 - k a \left(\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{a} \right)^2 \right]$$

Die Größe L in der zweiten Zeile definiert die Lagrange-Dichte. Wenn wir jetzt die Anzahl der Federn gegen Unendlich streben lassen (und diese gleichzeitig unendlich klein werden lassen) erhalten wir L in der folgenden Form:

$$L = \int \mathcal{L} dx$$

$$\mathcal{L} \left(\xi, \frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \xi}{\partial x}, t \right) = \frac{1}{2} \left[\mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 - Y \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]$$

Eine Konsequenz des Formalismus mit Lagrange-Dichten ist, dass unser System nun eine unendliche Anzahl von Freiheitsgraden hat! Eine andere Konsequenz ist, dass die Lagrange-Dichte auch eine Funktion der räumlichen Ableitung der „Feldkoordinate“ ξ ist (normalerweise ist L nur eine Funktion der Zeitableitung). Aber die Vorteile dieses Übergangs überwiegen seine Nachteile, da wir nun beliebige Felder (sowohl Skalarfelder als auch Vektorfelder sowie besondere Quantenmechanische Felder wie z.B. Spinorfelder) beschreiben können.

Eine Verallgemeinerung zum räumlich-dreidimensionalen Fall liefert die vierdimensionale **Euler-Lagrange-Gleichung für Lagrange-Dichten**, welche wir für elektromagnetische Felder benötigen werden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \xi}{\partial x^\mu} \right)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \xi)} \right) = 0$$

Der Vollständigkeit halber soll noch erwähnt werden, dass es auch möglich ist eine kanonisch-konjugierte Impuls-Dichte zu definieren:

$$\pi(x^\mu) = \pi(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)}$$

und damit die Hamilton-Dichte H :

$$\mathcal{H} \left(\pi, \xi, \frac{\partial \xi}{\partial x^i}; t \right) = \pi \frac{\partial \xi}{\partial t} - \mathcal{L} \left(\xi, \frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \xi}{\partial x^i} \right)$$

Aus dieser Hamilton-Dichte folgen dann die gewöhnlichen Hamilton Gleichungen, jedoch mit Dichten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \xi} &= - \frac{\partial \pi}{\partial t} \end{aligned}$$

13.7 Das elektromagnetische Feld

Als letzte Aufgabe schreiben wir nun die Lagrange-Dichte für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld auf und leiten aus dieser mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichung die Maxwell-Gleichungen her.

Zuerst stellen wir fest, dass die Lagrange-Dichte aus höchstens drei Teilen bestehen kann: 1) Die Lagrangefunktion des Teilchens, 2) Die Lagrangefunktion der Wechselwirkung zwischen Teilchen und Feld und 3) Die Lagrangefunktion des Feldes. (Diese Annahme kann exakt bewiesen werden, worauf wir aber an dieser Stelle verzichten.)

$$\mathcal{L}^{\text{tot}} = \mathcal{L}^{\text{mech}} + \mathcal{L}^{\text{interaction}} + \mathcal{L}^{\text{field}}$$

Der mechanische Teil der Lagrange-Dichte kann leicht gefunden werden. Er ist lediglich die kinetische Energie in Vierervektor Form, ausgedrückt über die Ruhemassendichte ρ_0 :

$$\mathcal{L}^{\text{mech}} = \frac{1}{2} \rho_0 u^\mu u_\mu$$

Den Wechselwirkungs-Teil haben wir bereits zuvor über die Lagrangefunktion L_4 als Produkt $qu^\mu A^\mu$ eingeführt. Wir können also schreiben:

$$\mathcal{L}^{\text{interaction}} = j^\mu A_\mu$$

Zuletzt benötigen wir noch die Lagrange-Dichte für den Feld-Teil, welche gleich der Differenz der elektrischen und magnetischen Energiedichten im Feldes ist. Das ist eine der zwei Skalar-Invarianten welche wir durch den Feldtensor $F_{\mu\nu}$ erhalten haben. Nachdem wir eine passende Konstante addiert haben können wir schreiben:

$$\mathcal{L}^{\text{field}} = \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Die gesamte Lagrange-Dichte lautet also:

$$\mathcal{L}^{\text{tot}} = \frac{1}{2} \rho_0 u^\mu u_\mu + j^\mu A_\mu + \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Wenn wir nun ausschließlich das elektromagnetische Feld betrachten (wie im Fall der Maxwell-Gleichungen) können wir den mechanischen Teil, welcher sich auf das Teilchen bezieht, ignorieren. In diesem Fall lautet die Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}^{\text{EM}} = \mathcal{L}^{\text{interaction}} + \mathcal{L}^{\text{field}} = j^\nu A_\nu + \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Nun wenden wir die Euler-Lagrange-Gleichung (Seite 7) **mit der Feldvariable A** an:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{\text{EM}}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{\text{EM}}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right] = 0$$

Zum Berechnen des ersten Terms nutzen wir, dass der zweite Term ein Skalar, d.h. seine Ableitung ist gleich Null ist. Damit ergibt sich einfach:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{\text{EM}}}{\partial A_\nu} = j^\nu$$

Um den zweiten Term der Gleichung auszuwerten führen wir die folgende Rechnung durch:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{\text{EM}}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right] &= \frac{1}{4\mu_0} \partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (F^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda}) \right] \\ &= \frac{1}{4\mu_0} \partial_\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \left[(\partial^\kappa A^\lambda - \partial^\lambda A^\kappa) (\partial_\kappa A_\lambda - \partial_\lambda A_\kappa) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4\mu_0} \partial_\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \left[\partial^\kappa A^\lambda \partial_\kappa A_\lambda - \partial^\kappa A^\lambda \partial_\lambda A_\kappa \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \partial^\lambda A^\kappa \partial_\kappa A_\lambda + \partial^\lambda A^\kappa \partial_\lambda A_\kappa \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \left(\partial^\kappa A^\lambda \partial_\kappa A_\lambda - \partial^\kappa A^\lambda \partial_\lambda A_\kappa \right) \right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \left(\partial^\kappa A^\lambda \partial_\kappa A_\lambda \right) &= \partial^\kappa A^\lambda \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial_\kappa A_\lambda + \partial_\kappa A_\lambda \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial^\kappa A^\lambda \\ &= \partial^\kappa A^\lambda \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial_\kappa A_\lambda + \partial_\kappa A_\lambda \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \eta^{\kappa\alpha} \partial_\alpha \eta^{\lambda\beta} A_\beta \\ &= \partial^\kappa A^\lambda \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial_\kappa A_\lambda + \eta^{\kappa\alpha} \eta^{\lambda\beta} \partial_\kappa A_\lambda \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial_\alpha A_\beta \\ &= \partial^\kappa A^\lambda \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial_\kappa A_\lambda + \partial^\alpha A^\beta \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial_\alpha A_\beta \\ &= 2\partial^\mu A^\nu \end{aligned}$$

Analog erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \left(\partial^\kappa A^\lambda \partial_\lambda A_\kappa \right) = 2\partial^\nu A^\mu$$

Damit erhalten wir als zweiten Term der Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{\text{EM}}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right] = \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\nu}$$

Mit \mathcal{L}^{EM} als Lagrange-Dichte erhalten wir aus der Euler-Lagrange Gleichung die folgende Gleichung für das elektromagnetische Feld:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{\text{EM}}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{\text{EM}}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right] = j^\nu - \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

oder,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

Das ist nichts anderes als die Maxwell-Gleichungen mit Quelltermen in Tensorform!

- **Damit endet unsere Reise durch die klassische Elektrodynamik, welche mit den Maxwell Gleichungen begonnen hatte.**